Suite V - Die den Weg Weisende

Teil 1: Essays 318-325

Erratum Suite I.
Erratum Suite II.
Vorwort.
qudr.
Wurzelfunktion $\sqrt{.}$.
Betragsfunktion $|.|$.
Beginn Folklore.
Dreiecks-Ungleichung$|.|$.
Dreiecks-Ungleichung*$|.|$.
SSatz Zahlen. SSZ.
$-\mathsf{A}$Satz Zahlen. $-\mathsf{A}$SZ.
$-\mathsf{S}$Satz Zahlen. $-\mathsf{S}$SZ.

MSC2010: 26-01, 26D07, 26A09.

Andreas Unterreiter

30. September 2016

Kommentar und Bemerkung **90-6** sind nicht zutreffend. Statt dessen sollte genauer folgender Maßen geschrieben werden.

90-6. Für M_antitone Funktionen auf M_Ketten gelingt keine ansprechende Re-Formulierung von **Tarski VII**. .

90-6(Satz) *Es gelte:*

→) K *ist* M*_Kette.*

→) M *antiSymmetrisch in* K.

→) f *Funktion.*

→) f *ist* M*_antiton auf* K.

→) *"*$p \in K$*" und "*p *Fixpunkt von* f*".*

Dann folgt:

a) $K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\} = \{p\}$.

b) p *ist* M*_Supremum von* $K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

c) p *ist* M*_Maximum von* $K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

53.0(x) $= \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } x\}$.

Beweis **90-6**

1.1: Aus →) "... p Fixpunkt von f"
folgt via **53-1(Def)**: $p = f(p)$.

1.2: Aus →) "$p \in K$ ..." und
aus →) "... p Fixpunkt von f"
folgt via **53-12**: $p \in K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

2: Aus 1.2 "$p \in K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\} = \{p\}$"
folgt via **1-8**: $\{p\} \subseteq K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

...

Beweis **90-6** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $\alpha \in K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

4: Aus Thema3 “ $\alpha \in K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\} = \{p\}$ ”
folgt via **53-12**: $(\alpha \in K) \wedge (\alpha \text{ ist Fixpunkt von } f)$.

5: Aus 4 “ $\ldots \alpha$ ist Fixpunkt von f ”
folgt via **53-1(Def)**: $\alpha = f(\alpha)$.

6: Aus →) “ K ist M_Kette ” ,
aus →) “ $p \in K \ldots$ ” und
aus 4 “ $\alpha \in K \ldots$ ”
folgt via **30-68(Def)**: $(p\_M\_\alpha) \vee (\alpha\_M\_p)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{6.1.Fall}}$ p_M_α.

7: Aus →) “ f ist M_antiton auf K ” ,
aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $p \in K \ldots$ ” ,
aus 4 “ $\alpha \in K \ldots$ ” und
aus 6.1.Fall “ p_M_α ”
folgt via **81-7**: $f(\alpha)\_M\_f(p)$.

8: Aus 7,
aus 5 und
aus 1.1
folgt: α_M_p.

9: Aus →) “ M antiSymmetrisch in K ” ,
aus 4 “ $\alpha \in K \ldots$ ” ,
aus →) “ $p \in K \ldots$ ” ,
aus 8 “ α_M_p ” und
aus 6.1.Fall “ p_M_α ”
folgt via **30-45(Def)**: $\alpha = p$.

. . .

. . .

Beweis **90-6** . . .

`Thema3` $\alpha \in K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}$.

. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`6.2.Fall` α_M_p.

`7:` Aus →) "f ist M_antiton auf K",
aus →) "f Funktion",
aus `4` "$\alpha \in K \ldots$",
aus →) "$p \in K \ldots$" und
aus `6.2.Fall` "α_M_p"
folgt via **81-7**: $f(p)\_M\_f(\alpha)$.

`8:` Aus `7`,
aus `1.1` und
aus `5`
folgt: p_M_α.

`9:` Aus →) "M antiSymmetrisch in K",
aus `4` "$\alpha \in K \ldots$",
aus →) "$p \in K \ldots$",
aus `6.2.Fall` "α_M_p" und
aus `8` "p_M_α"
folgt via **30-45(Def)**: $\alpha = p$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha = p$.

Ergo `Thema3`: $\forall \alpha : (\alpha \in K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\}) \Rightarrow (\alpha = p)$.

Konsequenz via **1-10**: `A1` | "$K \cap \{\omega : \omega \text{ ist Fixpunkt von } f\} \subseteq \{p\}$"

. . .

Beweis **90-6** ...

4.a): Aus A1 gleich "$K \cap \{\omega : \omega$ ist Fixpunkt von $f\} \subseteq \{p\}$" und
aus 2"$\{p\} \subseteq K \cap \{\omega : \omega$ ist Fixpunkt von $f\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $K \cap \{\omega : \omega$ ist Fixpunkt von $f\} = \{p\}$.

5: Aus →) "K ist M_Kette" und
aus →) "$p \in K \dots$"
folgt via **38-23**: p ist M_Maximum von $\{p\}$.

6: Aus 5"p ist M_Maximum von $\{p\}$"
folgt via **38-7**: p ist M_Supremum von $\{p\}$.

7.b): Aus 6 und
aus 4.a)
folgt: p ist M_Supremum von $K \cap \{\omega : \omega$ ist Fixpunkt von $f\}$.

7.c): Aus 5 und
aus 4.a)
folgt: p ist M_Maximum von $K \cap \{\omega : \omega$ ist Fixpunkt von $f\}$.

□

Der Beweis von **145-7**`g)` - es soll gezeigt werden, dass aus $x, y \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$ folgt - ist nicht richtig. Bei der ersten Umformung in Punkt `4` wird auf **133-12** verwiesen, wonach $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathtt{Term}(x, y)$ gelten soll. Jedoch ist via **133-12** nur die Gleichung $\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y) = \mathtt{Term}(x, y)$ verfügbar. Damit ist der Beweis formal falsch. Jedoch ist die Aussage **145-7**`g)` - beinahe: trivialer Weise - richtig, so dass dem LW durch diesen fehlerhaften Beweis kein nachhaltiger Schaden erwächst. Ein richtiger Beweis - der nur auf Resultate zurück greift, die *vor* **145-7** bewiesen werden - wird wegen der Präsentation eines auch an sich interessanten Lemmas erst in **#384** - **Suite VI** - nachgereicht.

In den Beweisen von **148-4,6** wird fälschlicher Weise behauptet, dass $-1 : (-x) = 1 : x$ via **FS**$-$: gilt. Das stimmt so nicht. Klarer Weise ist die Gleichung aber richtig, doch es muss der triviale Beweis nachgereicht werden. Auch dies geschieht in **#384**.

Die Erstellung von **Suite V - Die den Weg Weisende** beginnt im November 2014. Zu diesem Zeitpunkt besteht die Hoffnung, innerhalb des Jahres 2015 *zwei* Suiten - nämlich **Suite IV - Die Zerrissene** und **Suite V** - fertig zu stellen. Anders als bei **Suite IV** scheint nach einigem Herumprobieren eine Methode gefunden worden zu sein, die ein vergleichsweise rasches Vorangehen erlaubt. Insbesondere werden in Zukunkft Nebenwege wie bei KLT oder ODE nicht mehr beschritten. Zu wenig genau, zu sehr abseits und mit zu vielen Fehlern behaftet erscheinen diese Ausarbeitungen.

Damit sind die zeitlichen Verluste bei der Erschaffung des LWs spürbar verringert.

Dem steht die Erschaffung zitierfähiger Begleitliteratur entgegen. Deren Erstellung nimmt mittlerweile (November 2o15) die größte Zeit in Anspruch und es ist anders als vor einem Jahr nicht in Aussicht, noch bis zum Ende des Jahres 2o15 **Suite V** fertig stellen. Erfreulicher Weise kann mittlerweile der Begleitliteratur eine Struktur gegeben werden, die das Sortieren und Verwalten vereinfacht. In dem Inhaltsverzeichnis `theflow` werden alle bisherigen Begriffe aufgelistet und in den zugehörigen Kapiteln sind die jeweiligen Resultate gesammelt. Entscheidend ist, dass die *Reihenfolge* der Begriffe von `theflow` *nicht immer* der Reihenfolge es LWs entspricht. So scheint das LW eine "innere Struktur" aufzuweisen, die zwar *deduktiv erarbeitet*, aber besser *querveisend verwaltet* wird.

Die Bezeichnung **Die den Weg Weisende** bezieht sich nicht nur auf die direktere Vorgehensweise bei der Verfassung der Essays sondern auch auf die beginnende Maßtheorie. Hierbei sind anfangs "x_Gewichte" von einiger Bedeutung. ϕ ist genau dann x_Gewicht auf $\mathfrak{M}$, wenn ϕ eine Funktion ist, so dass für alle $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$ mit $\alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}$ und $\alpha \cap \beta = 0$ die vertraut scheinende Gleichung $\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_x\_\phi(\beta)$ gilt. Hier spielt es zunächst keine Rolle, ob x eine Funktion - später oft: eine Algebra - ist oder ob $\alpha, \beta, \alpha \cup \beta$ in $\mathsf{dom}\,\phi$ liegen. Diese Herangehensweise ist typisch für das LW und mir neu.

Im Dezember 2015 scheint mir, dass mit der zunehmend "mengentheoretischen Durchdringung" der bislang entwickelten Mathematik ein neuer, wichtiger Schritt getan ist. Die "Durchdringung" ist an Essay **#364** gut zu erkennen. So wird etwa bereits in **#30** "M transitiv" in die Essays eingeführt. Doch erst nun wird klar, dass die dort mit Quantoren gegebene Definition durch "$M \circ M \subseteq M$" ersetzt werden kann. Ähnliches gilt für Reflexivität und (Anti-)Symmetrie. Die mengentheoretische Umschreibung "$M \cap \mathsf{id}_z = 0$" von "M irreflexiv in z" ist bereits in **#30** aufgefallen.

#318. qudr ist die Einschränkung von $\uparrow 2$ auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$. qudr ist eine Bijektion. Die Wurzelfunktion ist $\sqrt{.}$. Per definitionem gilt $\sqrt{.} = \mathsf{qudr}^{-1}$. Auch $\sqrt{.}$ ist eine Bijektion. Es gilt $\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \mathsf{ran}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$. Unter anderem gelten für alle x mit $0 \leq x$ die Gleichungen $\sqrt{x \cdot x} = x$ und $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$.

#319. Falls $y \in \mathbb{T}$, so ist für die Gleichung $x \uparrow 2 = y$ eine komplette Lösungstheorie verfügbar. Im speziellen Fall $y \leq 0$ ergibt sich aus $x \uparrow 2 = y$ die Alternative

$(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y})$.

#320. E ist genau dann streng M_isoton/M_antition auf z, wenn E auf z $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _isoton/$\overset{\textbf{ir}}{M}$ _antition ist. Interessanter Weise folgt aus der strengen Isotonie/Antitonie nicht ohne Weiteres die Isotonie/Antitonie. Ist z eine M_Kette und ist E streng M_isoton/M_antiton auf z - hier muss E keine Funktion sein -, so ist E injektiv auf z. Beim Übergang von M zu M^{-1} bleiben (strenge) Istonie/Antitonie erhalten. Dies beruht unter anderem auf der Gleichung

$$\overset{\textbf{ir}}{\overbrace{M^{-1}}} = \left(\overset{\textbf{ir}}{M}\right)^{-1}.$$

#321. Die Betragsfunktion ist $|.| = \sqrt{\ } \circ \mathsf{ab2}$. Die Gleichung $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$ ist nicht immer verfügbar. Die vertrauten $\leq$ _Terme $-|x| \leq x \leq |x|$ gelten genau für $x \in \mathbb{S}$. Es gilt $|x| \in \mathbb{S}$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{B}$.

#322. Falls f eine injektive Funktion ist, die streng M_isoton auf der M_Kette E mit antiSymmetrischem M ist, dann folgt aus $x, y \in E$ mit $f(x)$_ $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _$f(y)$ die "Urbild-'Gleichung" x_ $\overset{\textbf{ir}}{M}$ _y. Ein entsprechendes Resultat gilt für injektive Funktionen f, die streng M_antiton auf der M_Kette E mit antiSymmetrischem M sind.

#323. Ist f eine auf $E \subseteq \mathbb{S}$ streng $\leq$ _isotone, injektive Funktion, so folgt aus $x, y \in E$ und $f(x) < f(y)$ die $<$ _Aussage $x < y$. Aus $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ folgt $0 \leq x < y$. Aus $0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2$ folgt $0 \leq |x| < |y|$.

#324. Für $x, y \in \mathbb{R}$ oder $x, y \in \mathbb{S}$ gilt $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

#325. Die Dreiecks-Ungleichung|.| gilt in ihrer klassischen Form $|x+y| \leq |x|+|y|$ genau dann, wenn $x + y \in \mathbb{B}$.

#326. Die Dreiecks-Ungleichung*|.| garantiert unter anderem $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$. Die Ungleichung $||x| - |y|| \leq |x - y|$ gilt genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{B}$ und $(x \in \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{C})$.

#327. Ohne Bezug zu Funktionen oder zu speziellen Argumenten werden limes inferior, limes superior und limes durch die Betrachtung von focus inferior, focus superior und focus vorbereitet. Jedes M_Supremum von $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E]$ ist ein M_focus inferior von E und jedes M_Infimum von $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E]$ ist ein M_focus superior von E. Ist M antiSymmetrisch, so ist etwa $\overset{M}{\mathsf{foc}}$ eine Funktion, die jedem $E \in \overset{M}{\mathsf{efoc}} = \mathsf{dom}\,(\overset{M}{\mathsf{foc}})$ den wegen der AntiSymmetrie von M eindeutigen M_Focus $\overset{M}{\mathsf{foc}}\,(E)$ zuordnet.

#328. E ist genau dann eine Filter-Basis, wenn $0 \neq E$ und es zu allen $\alpha, \beta \in E$ eine Menge $0 \neq \Omega \in E$ gibt, so dass $\Omega \subseteq \alpha, \beta$. Ist M transitiv, ist E eine Filter-Basis, ist p ein M_foxus inferior von E und ist q ein M_focus superior von E, so folgt p_M_q.

#329. Eine Klasse p ist genau dann ein (M,E)gw (inferirior/superior) von x, wenn p ein M_focus (inferior/superior) von $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ ist. Mit dieser Begriffsbildung bewegt sich das LW in Richtung von limiten, also von Grenzwerten. Diesem Aspekt ist die Abkürzung "gw" geschuldet. Es wird ähnlich wie in **#327** vorgegangen.

#330. Ist M (Stark,Total) Vollständig, so ergeben sich einfache, hinreichende Bedingungen für das Vorhandensein von (M,E)gw (inferior/superior). Im Speziellen hat für Total Vollständige M jede Klasse x einen (M,E)gw inferior/superior. Ist $\{x[\lambda] : \lambda \in E\}$ eine Filter-Basis und ist M transitiv, so gilt p_M_q für jeden (M,E)gw inferior p von x und jeden (M,E)gw superior q von x.

#331. Falls E eine Menge ist, so ist $\bigcup\{\bigcap \lambda : \lambda \in E\}$ der sse_focus inferior von E. E hat genau dann einen sse_focus superior, wenn $0 \neq E$ und in diesem Fall ist der sse_focus superior von E gleich $\bigcap\{\bigcup \lambda : \lambda \in E\}$.

#332. Wegen $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{gwinf}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ hat jede Menge einen (sse,E)gw inferior. Die Aussage $\overset{\mathsf{sse},E}{\mathsf{egwsup}} = \mathcal{U}$ gilt genau für $0 \neq E$, so dass im Fall $0 \neq E$ - E muss hier keine Menge sein - jede Menge einen (sse,E)gw superior hat. Wegen $\overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{gwsup}} = \overset{\mathsf{sse},0}{\mathsf{egwsup}} = 0$ gibt es im Fall $E = 0$ keine Menge, die einen (sse,E)gw superior hat.

#333. Ist $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge, ist M antiSymmetrisch und Total Vollständig, so ist $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[E])$ der M_focus inferior von E und $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[E])$ ist der M_focus superior von E.

#334. Ist $(\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$ eine Menge, ist M antiSymmetrisch und Total Vollständig, so ist $\overset{M}{\mathsf{sup}}\,(\overset{M}{\mathsf{inf}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ der (M,E)gw inferior von x und $\overset{M}{\mathsf{inf}}\,(\overset{M}{\mathsf{sup}}\,[\{x[\lambda] : \lambda \in E\}])$ ist der (M,E)gw superior von x.

#335. Die Klasse aller Mengen, die "punktierte E-Umgebungen von p" sind, bilden $E^{\mathsf{upkt}}p = \{\lambda \setminus \{p\} : p \in \lambda \in E\}$. Eine Klasse q ist genau dann (M,E)limes inferior von x in p, wenn q ein $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw inferior von x ist. Eine ähnliche Begriffs-Bildung kennzeichnet Klassen, die (M,E)limes superior von x in p sind. Zur Unterscheidung später zu besprechender "topologischer Limites" wird hier von "limites ordinati" gesprochen. Dabei ist eine Klasse genau dann ein (M,E)limes ordinatus von x in p, wenn sie ein $(M,E^{\mathsf{upkt}}p)$gw von x ist.

#336. In Erweiterung der Untersuchungen von **#266** wird ein zeitdiskretes Modell zur Generation und dem Abbau biologischer Entitäten mit P, $1 \leq P \in \mathbb{N}$, möglicherweise verschiedenen Lebensdauern hergeleitet und diskutiert.

#337. R ist genau dann **ana1** von q,x, wenn R eine Funktion mit Definitions-Bereich aus $\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ mit $R(0) = \{(0,q)\}$ ist und in rekursiver Weise für alle $n, 1+n \in \mathsf{dom}\, R$ die Gleichung $R(1+n) = \mathsf{337.0}(R(n),x)$ gilt. Der Klassen-Term $\mathsf{337.0}(x,y)$ ist etwas verwickelt definiert und zielt darauf ab, jede endliche Menge von Zahlen addieren zu können - auch wenn dieses Ansinnen noch nicht direkt sichtbar ist. Die Klasse $\mathtt{rf1}qx$ ist die Vereigung aller Mengen, die **ana1** von q, x sind. $\mathtt{rf1}qx$ ist ebenfalls **ana1** von q, x und somit ist $\mathtt{rf1}qx$ die inklusions-größte derartige Klasse. Ist x eine Menge, so ist $\mathtt{rf1}qx$ auf $\mathbb{N}$ definiert.

#338 Ist R **ana1** von q, x und ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, so gilt $n \in \mathbb{N}$ und $\mathsf{dom}\,(R(n))$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$. Wegen $(\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}) \cap (\mathcal{U}_m \setminus \mathcal{U}_{-1+m}) = 0$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ ergibt sich für derartige n, m die Gleichung $(\mathsf{dom}\,(R(n))) \cap (\mathsf{dom}\,(R(m))) = 0$.

#339 Ist R **ana1** von q, x, so ist $R(0) = \{(0, q)\}$ klarer Weise eine Funktion. Bei $R(1)$, $1 \in \mathsf{dom}\, R$, liegen die Dinge nicht ganz so einfach. Immerhin ist in diesem Fall $R(1)$ eine Funktion, wenn x eine Funktion ist.

#340 Ist R ist **ana1** von q, x, und gilt $2 \in \mathsf{dom}\, R$, so wird $R(2)$ auf die Funktions-Eigenschaft hin untersucht. Die Betrachtungen beginnen sich bald auf $x = \Box$ Algebra in A zu konzentrieren. Ist in diesem Kontext $R(2)$ eine Funktion, so muss für alle $\alpha, \beta \in A$ die Aussage $(q\_\Box\_\alpha)\_\Box\_\beta = (q\_\Box\_\beta)\_\Box\_\alpha$ gelten - und dies ist umgekehrt auch hinreichend für die Funktions-Eigenschaft von $R(2)$. Es werden Zusammenhänge mit Kommutativität und Assoziativität von $\Box$ hergestellt. Dabei ist q ist $\Box$neutral auf A interessant.

#341 Ist $\Box$ eine Algebra in A, ist R **ana1** von $q, \Box$ und gilt überdies $q \in A$, so gelten für jedes $n \in \mathsf{dom}\, R$ die Aussagen $R(n) \subseteq \mathcal{P}(A) \times A$, $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$ und $\mathsf{ran}\,(R(n)) \subseteq A$. Im Speziellen besteht hier der Definitions-Bereich von $R(n)$ genau aus allen n-elementigen Teilmengen von A.

#342 Ist f eine Funktion und ist $\Box$ eine Algebra in A, so ist $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ eine Funktion, wenn $f, \Box$ Eigenschaften aufweisen, die in späterer Folge bei der Untersuchung von Klassen, die **ana1** von $q, \Box$ sind, unter anderem durch Kommutativität und Assoziativität von $\Box$ garantiert sind. Gilt $p \notin E$ mit $p, f(E) \in A$ und ist $\mathsf{337.0}(f, \Box)$ eine Funktion, so folgt $\mathsf{337.0}(f, \Box)\,(\{p\} \cup E) = f(E)\_\Box\_p$.

#343 Ist $R(n) = 0$ für R **ana1** von q, x, so gilt auch $R(m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. In diesem Fall gilt $\mathsf{dom}\,(\mathtt{rf1}qx) = \mathbb{N}$ und $\mathtt{rf1}qx(m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. $R(0) = 0$ gilt genau dann, wenn q eine Unmenge ist. Hingegen folgt aus $R(1) = 0$ die Aussage $q \notin \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, x)$. Gilt $0 \neq R(1)$ mit $1 \in \mathsf{dom}\, R$, so folgt $q \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{dom}\, x)$.

#344. Eine Klasse $\Box$ tunnelt rechts auf Q genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ die Gleichung $(\alpha\_\Box\_\beta)\_\Box\_\gamma = (\alpha\_\Box\_\gamma)\_\Box\_\beta$ gilt. Nur der Vollständigkeit halber wird auch noch "$\Box$ tunnelt links auf Q" definiert. Ist $\Box$ eine Algebra in der *Menge* A und ist $\Box$ auf A sowohl kommutativ als auch assoziativ, so ist $\mathtt{rf1}q\Box(n)$ für jedes $q \in A$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion - es gilt also $\mathtt{rf1}q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$.

#345. Die Klasse $\overset{\mathsf{fin}}{q,},x$ wird via $\overset{\mathsf{fin}}{q,},x = \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf1}qx)$ defioiert. Ist $\Box$ eine Algebra in A, die auf A rechts tunnelt und gilt überdies $q \in A$, so folgt $\overset{\mathsf{fin}}{q,}\Box : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A) \to A$

mit $q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box(0) = q$ und für $a \in A$ gilt $(q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{a\}) = q\_\Box\_a$ und für $a \in A$ mit $a \notin E \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ gilt $(q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(\{a\} \cup E) = (q\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(E)\_\Box\_a$.

#346. Mit den x_Gewichten auf $\mathfrak{M}$ wird die Maßtheorie begonnen. Unabhängig von weiteren Strukturen ist ϕ ein x_Gewicht auf $\mathfrak{M}$, wenn ϕ eine Funktion ist und wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$ mit $\alpha \cup \beta \in \mathfrak{M}$ und $\alpha \cap \beta = 0$ die Gleichung $\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha)\_x\_\phi(\beta)$ gilt. Einige aus der Maßtheorie her vertrauten Resultate sind ohne allzu viel Zutun verfügbar, wenn ϕ ein x_Gewicht auf einem Mengenring $\mathfrak{R} \subseteq \mathsf{dom}\,\phi$ ist und wenn darüber hinaus gehend x assoziativ auf $\phi[\mathfrak{R}]$ ist. Unter anderem ist für belieibige Klassen $\mathfrak{M}$ die Funktion # ein A_Gewicht auf $\mathfrak{M}$ und $1^{\mathbf{on}}\mathfrak{M}$ ist ein M_Gewicht auf $\mathfrak{M}$.

#347. Ist $\Box$ eine Algebra auf einer Menge A, ist o ein $\Box$neutrales Element auf A und tunnelt $\Box$ rechts auf A, so ist $o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box$ ein $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(A)$ und *für alle* E, D gelten die Gleichungen $(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(E)\_\Box\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(D) = (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(D)(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(E)$ und $(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(E \cup D)\_\Box\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(E \cap D) = (o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(E)\_\Box\_(o\overset{\mathsf{fin}}{,}\Box)(D)$.

#348. Die Funktion, die jeder endlichen Menge von Zahlen eine Summe zuordnet, heißt $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}$. Die nicht vorhandene uneingeschränkte Assoziativität der Multiplikation verhindert eine ähnlich rasche Vorgehensweise bei Produkten. Es werden zunächst für beliebige x die Funktionen $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_x$ in die Essays eingebracht. Ähnlich ansprechende Eigenschaften wie bei der Summe liegen bei $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_x$ vor, wenn M assoziativ auf x mit $1 \in x$ ist und wenn für alle $\alpha, \beta \in x$ die Aussage $\alpha \cdot \beta \in x$ gilt Damit haben im Speziellen die Produkte $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}$ und $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}$ ansprechende Eigenschaften. Ist E eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$, so gilt $\mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{T}}(E) = \mathsf{M}^{\mathtt{fin}}_{\mathbb{C}}(E)$.

#349. Für jede natürliche Zahl n gilt $\mathsf{A}^{\mathtt{fin}}(n) = ((-1+n)\cdot n) : 2$. Spät werden die Gleichungen $M[\{p\}] = [p \overset{M}{|} \cdot\rangle$ und $M^{-1}[\{p\}] = \langle\cdot \overset{M}{|} p]$ in das LW eingebracht. Ist f eine Funktion, so gilt stets $[p \overset{f}{|} \cdot\rangle = \{f(p)\}$. Ist x injektiv, so gilt ähnlich $\langle\cdot \overset{x}{|} p] = \{x^{-1}(p)\}$.

#350. Die Untersuchungen beginnen Kurs auf die Summation/das Produkt von zahlenwertigen Funktionen zu nehmen, ohne dass diese Erweiterung der beiden Grundrechenarten alleiniges Ziel der Darlegungen sein sollen. Ähnlich wie in der Vorbereitung von $q\overset{\mathsf{fin}}{,}x$ wird in recht allgemeiner Weise der Klassen-Term $\mathsf{350.0}(x, z, y)$ in die Essays eingebracht und es wird gesagt, was es heißt **ana2** von ϕ, q, x zu sein. Hier zielt "ϕ" bei der Summation/des Produkts auf jene Funktion ab, deren Werte addiert/multipliziert werden sollen. Wie bei der Arbeit am LW üblich wird in der Exposition auf die "Funktions-Eigenschaft" von ϕ verzichtet, i.e. ϕ ist eine ansonsten beliebige Klasse.

#351. Ist f eine auf einer M_Kette K streng M_isotone (streng M_antitone) Funktion und ist M antiSymmetrisch, so ist $(f \upharpoonleft K)^{-1}$ auf $f[K]$ streng M_isoton (streng M_antiton).

#352. Ist R **ana2** von ϕ, q, x, so ist für $n \in \mathsf{dom}\, R$ der Definitions-Bereich $\mathsf{dom}\,(R(n))$ eine TeilKlasse von $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n}$. In den Spezialfällen $n = 0$ ist $R(0) = \{(0, q)\}$ stets eine Funktion und für $n = 1$ ist $R(1) = \mathtt{350.0}(\{(0, q)\}, \phi, x)$ eine Funktion, wenn ϕ, f Funktionen sind.

#353. Das "Element-Sein" in $\mathtt{350.0}(x, z, y)$" stellt sich unter den zusätzlichen Bedingungen $x = f$ Funktion oder $z = \phi$ Funktion oder $y = \Box$ Algebra in A stellenweise klarer als im allgemeinen Fall dar.

#354. Ist $n \in \mathsf{dom}\, R$, R ist **ana2** von $\phi, q, \Box$ und $q \in A$ und $\Box$ ist eine Algebra in A, so gilt $\mathsf{dom}\,(R(n)) = \mathcal{P}(\phi^{-1}[A]) \cap (\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{-1+n})$, so dass der Definitions-Bereich von $R(n)$ genau aus den n-elementigen Teilmengen von $\phi^{-1}[A]$ besteht.

#355. In halbwegs verantwortlicher Weise kann für jede beliebige Zahl ξ die "Summe" aller natürlicher Zahlen$=\xi$ gesetzt werden. Präziser gesprochen gibt es zu jeder Zahl ξ ein A_Gewicht w auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \setminus_{\mathtt{in}} \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, das $(\mathsf{A}^{\mathtt{fin}} \downharpoonright \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\mathbb{N}))$ fortsetzt und für das $w(\mathbb{N}) = \xi$ gilt. Für diese Menge w und für $n \in \mathbb{N}$ gilt $w(\mathbb{N} \setminus n) = \xi - ((-1 + n) \cdot n) : 2 \in \mathbb{N}$.

#356. Wesentlich rascher als bei $\mathtt{rf1}q\Box$ kann Hinreichendes für $\mathtt{rf2}\phi q\Box : \mathbb{N} \to \mathsf{func}$ gefunden werden. Es reicht, dass ϕ eine Funktion ist, dass $\Box$ eine Algebra *in der Menge* A ist, dass $\Box$ rechts auf A tunnelt und dass $q \in A$ gilt.

#357. Per definitionem gilt $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q, x}\middle|\, \phi\right) = \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathtt{rf2}\phi q x)$. Ist ϕ eine Funktion, ist $\Box$ eine Algebra *in der Menge* A, gilt $q \in A$ und tunnelt $\Box$ rechts auf A, so gilt $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q, \Box}\middle|\, \phi\right) : \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A]) \to A$ und die Wirkung von $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q, \Box}\middle|\, \phi\right)$ erschließt sich aus den Aussagen $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q, \Box}\middle|\, \phi\right)(0) = q$, $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q, \Box}\middle|\, \phi\right)(\{\alpha\}) = q\_\Box\_\phi(\alpha)$ für alle $\alpha \in \phi^{-1}[A]$, und $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q, \Box}\middle|\, \phi\right)(\{\alpha\} \cup \beta) = \left(\overset{\mathtt{rek}}{q, \Box}\middle|\, \phi\right)(\beta)\_\Box\_\phi(\alpha)$ für alle α, β mit $\alpha \in \phi^{-1}[A]$ und $\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

#358. Ist ϕ eine Funktion, ist $\Box$ eine Algebra *in der Menge* A, ist o $\Box$neutral auf A und tunnelt $\Box$ rechts auf A, so ist $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o, \Box}\middle|\, \phi\right)$ ein $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[A])$.

#359. Im Hinblick auf die Multiplikation ist eine "eingeschränkte" Version von Aussagen aus **#358** hilfreich. Es gilt: Ist ϕ eine Fuktion, ist $\Box$ Algebra in A, ist o ist $\Box$neutral auf A, gilt $\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in Q) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in Q)$, tunnelt $\Box$ auf Q und ist $\Diamond = (\Box \downharpoonright Q \times Q)$, so ist $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o, \Diamond}\middle|\, \phi\right)$ ein $\Box$_Gewicht auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[Q])$ und die grundlegende Algebra $\Box$ erscheint in einigen interessierenden Aussagen über $\left(\overset{\mathtt{rek}}{o, \Diamond}\middle|\, \phi\right)$.

#360. Die Funktionen $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi) = \left(\overset{\mathsf{rek}}{0, \mathsf{A}}\middle|\, \phi\right)$ und

$$\left(\prod_x^{\mathsf{rek}} \phi\right) = \left(\overbrace{1, (\mathsf{M} \restriction x \times x)}^{\mathsf{rek}}\middle|\, \phi\right)$$

erscheinen in den Essays. Die Einschränkung von M auf $x \times x$ ist der fehlenden globalen Assoziativität von M geschuldet. In erwarteter Weise gelten für jede Funktion ϕ unter anderem die Aussagen $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(0) = 0$, $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\{\alpha\}) = \phi(\alpha)$, wobei $\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$, $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\{\alpha\} \cup \beta) = (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(\beta) + \phi(\alpha)$ für $\alpha \in \phi^{-1}[\mathbb{A}]$ und $\alpha \notin \beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{A}])$ und schließlich $(\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(E \cup D) + (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(E \cap D) = (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(E) + (\Sigma^{\mathsf{rek}}\phi)\,(D)$ für *beliebige* Klassen E, D. Die Terme $\left(\prod_{\mathbb{T}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ und $\left(\prod_{\mathbb{C}}^{\mathsf{rek}} \phi\right)$ haben für jede Funktion ϕ die erwarteten Eigenschaften und stimmen auf $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(\phi^{-1}[\mathbb{R}])$ überein.

#361. Bei der Arbeit an `theflow` stellt sich heraus, dass bei den punktweisen Begriffen entgegen der Intention des LWs einiges zu viel an Notationen eingeführt wird. So ist etwa bei $x. \in .y$ Einiges zu vereinfachen, wenn die "universelle $\in$-Relation in" zur Verfügung steht. Diese wird hier ins LW eingebracht. In allgemeiner Weise wird unter anderem $x.M.y$ auf E und $\neg(x.M.y)$ auf E definiert. Hier ist $M = \mathsf{in}$ von besonderem Interesse.

#362. Eher dem Drang zur Vollständigkeit als dem Zug zum Weiterkommen geschuldet werden die Notationen $p \subseteq .x$ auf E etc. und $p \subset .x$ auf E etc. nachgereicht.

#363. Erstaunlich viele Konzepte der Mathematik sind einfach mit Hilfe der Mengenlehre zu beschreiben. So gilt unter anderem "M transitiv" genau dann, wenn "$M \circ M \subseteq M$". Wäre mir diese Äquivalenz früher begegnet, hätte ich sie als Definition verwendet.

#364. Ist M symmetrisch, so gilt $p\_M.x$ auf E genau dann wenn $x.M\_p$ auf E und es gilt $x.M.y$ auf E genau dann, wenn $y.M.x$ auf E. Erwarteter Weise gilt $p = .x$ auf E genau dann, wenn $p\_\mathsf{id}.x$ auf E und genau so ist $x. = .y$ auf E äquivalent zu $x.\mathsf{id}.y$ auf E.

#365. Eine Klasse $\square$ heißt ab sofort "kommutativ" wenn *für alle* α, β die Gleichung $\alpha\_\square\_\beta = \beta\_\square\_\alpha$ gilt. Es zeigt sich, dass $\square$ genau dann kommutativ ist, wenn $\square$ kommutativ *auf* $\mathcal{U}$ ist. Noch einfacher liegen die Dinge, wenn es sich bei $\square$ um eine Algebra in A handelt. In diesen Fällen ist $\square$ genau dann kommutativ, wenn $\square$ kommutativ auf A ist. Auch ist $\square$ genau dann kommutativ, wenn $\square_{\mathsf{fkt}}$ kommutativ ist. Ähnliche Aussagen sind für assoziative und für rechts/links tunnelnde Klassen verfügbar.

#366. Die InversionsFunktion E, D gleich $\mathsf{inv}_{E,D} = \{((\lambda, \mu), (\mu, \lambda)) : (\lambda \in E) \wedge (\mu \in D)\}$ erscheint in den Essays. Die universelle InversionsFunktion ist $\mathsf{inv} =$

$\mathsf{inv}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$. $\Box$ ist genau dann kommutativ, wenn $\Box_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \Box_{\mathsf{fkt}} \circ \mathsf{inv}$. Ist $\Box$ kommutativ und Funktion, so gilt $\Box \circ \mathsf{id}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = \Box \circ \mathsf{inv}$.

#367. Neben vielen ähnlichen Ersetzungen gilt $E\ {}_{\mathtt{ni}}\cup_{\mathtt{in}}\ D = E\ {}_{\mathtt{ni}}\mathsf{cup}_{\mathtt{in}} D$.

#368. Die unscheinbar erscheinende Gleichung $\mathsf{337.0}(x,y) = \mathsf{350.0}(x, \mathsf{id}, y)$ hat schlussendlich die Identitität $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\mathsf{id}\right) = \overset{\mathsf{fin}}{q,x}$ zur Folge. Klarer Weise stellt sich die Frage, warum denn dann $\overset{\mathsf{fin}}{q,x}$ überhaupt in die Essays eingebracht wird. Die Antwort ist technisch. Der Aufwand, $\overset{\mathsf{fin}}{q,x}$ zu entwickeln, ist enorm. Ohne die dabei im Vorübergehen erledigten Zwischenresultate wäre der Aufwand für die Entwicklung von $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,x}\middle|\,\phi\right)$ noch größer gewesen. So wird der insgesamt längere, in Einzelschritten aber einfacher zu verfolgende Weg beschritten.

#369. In Ergänzung und in Analogie zu den Untersuchungen von **ana1** von q, x wird hier die Erkenntnis nachgereicht, dass für jede Klasse R, die **ana2** von ϕ, q, x ist und für die $R(n) = 0$ gilt, die Aussage $R(m) = 0$ für alle $n \leq m \in \mathsf{dom}\, R$ folgt. Es ergeben sich erwartete Konsequenzen für $\mathtt{rf}2\phi qx$.

#370. Vektorräume werfen ihren Schatten voraus, indem eine Verallgemeinerung des "Vielfachen" einer Klasse p bezüglich einer Algebra $\Box$ anvisiert wird. Die Verwendung von $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,\Box}\middle|\, p^{\mathbf{on}}\mathcal{U}\right)$ erscheint mir nicht als richtiger Weg. Steht doch bei $\left(\overset{\mathtt{rek}}{q,\Box}\middle|\, \ldots\right)$ die Absicht im Hintergrund, einer endlichen Ansammlung *verschiedener* Klassen via $\Box$ eine "verallgemeinerte Summe" zuzuordnen. Soll hingegen etwas wie "$((q_{\text{-}}\Box_{\text{-}}p)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}p)_{\text{-}}\Box_{\text{-}}p$" definiert werden, kommt es auf eine Reihenfolge *verschiedener* Klassen nicht an. Es wird hier immer die selbe Klasse p hinzugefügt. Es erscheint natürlicher, zu einer "gerichteten", sukzessiven Anwendung von $\Box$ überzugehen und damit Terme wie "$\sum_{j=1}^{7} f(j)$" zu verallgemeinern. Danach soll eine Anwendung auf $f = p^{\mathbf{on}}\mathcal{U}$ erfolgen. Zur Umsetzung des Vorhabens wird mit **ana3** von q, x, E begonnen.

#371. In Weiterführung der Untersuchungen von $\mathtt{rf}3qEx$ wird gezeigt, dass aus $\mathtt{rf}3qEx(n) = 0$ und $n \leq m \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\mathtt{rf}3qEx(m) = 0$ folgt.

#372. Im **IS**$\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$**:InduktonsSatz**$\{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$ wird eine hinreichende Bedinung für $n \subseteq x$, $n \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$, formuliert. Die Untersuchungen von **ana3** von q, x, E werden auf $x = f$ Funktion, $E = \phi$ Funktion spezialisert.

#373. Die funktionale Durchdringung des LWs schreitet mit der Einführung von $\mathsf{bigcup}, \mathsf{bigcap}$ voran. Dabei handelt es sich um jene Funktionen, deren Anschein durch die Notationen erweckt wird. Unter einigen zur Verfügung stehenden Resultaten sei $\mathsf{bigcap}(x) = \bigcap x$ genau dann, wenn x Menge hervorgehoben.

#374. Die Verallgemeinerung der gerichteten Summation wird mit $(q, E|_{\mathsf{to}}\, x) = \mathsf{bigcap} \circ \mathtt{rf}3qEx$ in die Essays eingebracht. Es wird $(q, E|_{\mathsf{to}\, n}\, x) = (q, E|_{\mathsf{to}}\, x)\,(n) = (\mathsf{bigcap} \circ \mathtt{rf}3qEx)(n)$ gesetzt.

Analysis: qudr. $\sqrt{\cdot}$.

Ersterstellung: 12/11/14 **Letzte Änderung: 21/11/14**

318-1. Die eine oder andere Voraussetzung in **8-17** ist überflüssig.

318-1(Satz)

a) *Aus "$z \notin x[y]$" und "$u \in y$" folgt "$(u, z) \notin x$".*

b) *Aus "$z \notin x[y]$" und "$(u, z) \in y$" folgt "$u \notin y$".*

Beweis **318-1** a) VS gleich $(z \notin x[y]) \wedge (u \in y)$.

1: Es gilt: $((u, z) \in x) \vee ((u, z) \notin x)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $(u, z) \in x$.

2: Aus 1.1.Fall "$(u, z) \in x$" und aus VS gleich "$\ldots u \in y$" folgt via **8-8**: $z \in x[y]$.

3: Nach VS gilt: $z \notin x[y]$.

Ende wfFallunterscheidung $(u, z) \notin x$.

b) VS gleich $(z \notin x[y]) \wedge ((u, z) \in y)$.

1: Es gilt: $(u \in y) \vee (u \notin y)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $u \in y$.

2: Aus VS gleich "$\ldots (u, z) \in y$" und aus 1.1.Fall "$u \in y$" folgt via **8-8**: $z \in x[y]$.

3: Nach VS gilt: $z \notin x[y]$.

Ende wfFallunterscheidung $u \notin y$.

□

318-2. Die ansonsten namenlose Funktion qudr und die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot}$ betreten die Essays.

318-2(Definition)

1) $\mathsf{qudr} = (\uparrow 2 \downharpoonright \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty])$.

2) $\sqrt{\cdot}\ = \mathsf{qudr}^{-1}$.

3) "$\mathfrak{C}$ **Wurzelfunktion**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\cdot}\ .$$

4) $\sqrt{x} = \sqrt{\cdot}(x)$.

318-3. Erwartetes über $\sqrt{\cdot}$ wird etabliert. Ergänzend zu **317-11** werden einige Aussagen über $\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$ bewiesen.

318-3(Satz)

a) $\sqrt{\cdot}$ *Wurzelfunktion.*

b) *Aus* "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *Wurzelfunktion" folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{A}$.

d) $(\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]) \cap \mathbb{A} = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

Beweis **318-3** a)
Aus "$\sqrt{\cdot} = \sqrt{\cdot}$"
folgt via **318-2(Def)**: $\sqrt{\cdot}$ Wurzelfunktion.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Wurzelfunktion.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C} \ldots$ Wurzelfunktion"
folgt via **318-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \sqrt{\cdot}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Wurzelfunktion"
folgt via **318-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \sqrt{\cdot}$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

cd)

1.c): Aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$" und
aus $\subseteq$**SZ** "$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-6**: $\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{A}$.

2.d): Aus 1.c) "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $(\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]) \cap \mathbb{A} = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

□

318-4. Zunächst wird qudr unter die Lupe genommen. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - cde) - f)`.

318-4(Satz)

a) qudr *Relation.*

b) qudr *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,\mathsf{qudr} = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

d) $\mathsf{ran}\,\mathsf{qudr} = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

e) $\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ *bijektiv.*

f) *Aus* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt "$\mathsf{qudr}(x) = x \cdot x$" *und* "$\mathsf{qudr}(x) = x \uparrow 2$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **318-4** `abcde)`

1: Via **318-2(Def)** gilt: $\mathsf{qudr} = (\uparrow 2 \downharpoonright \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

2: Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion"
folgt via **258-11**: $(\uparrow 2 \downharpoonright \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$ Funktion.

3.b): Aus 2 und
aus 1
folgt: qudr Funktion.

4.a): Aus 3.b) "qudr Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: qudr Relation.

5.1: Via **258-11** gilt:
$$\mathsf{dom}\,(\uparrow 2 \downharpoonright \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) = (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2).$$

5.2: Via **258-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\uparrow 2 \downharpoonright \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) = (\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]]$.

6.1: Aus 5.1 und
aus 1
folgt: $\mathsf{dom}\,\mathsf{qudr} = (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$.

6.2: Aus 5.2 und
aus 1
folgt: $\mathsf{ran}\,\mathsf{qudr} = \uparrow 2[\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]]$.

...

<u>Beweis</u> **318-4** `abcde)` ...

`7.c):` $\mathsf{dom}\,\mathsf{qudr} \stackrel{6.1}{=} (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2) \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathbb{A}$

$\stackrel{\mathbf{318-3}}{=} \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`7.d):` $\mathsf{ran}\,\mathsf{qudr} \stackrel{6.2}{=} (\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]] \stackrel{\mathbf{317-57}}{=} \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`8:` Aus **317-13**"$\uparrow 2$ injektiv auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **299-6**: $(\uparrow 2 \restriction \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$ injektiv.

`9.1:` Aus `3.b)` "qudr Funktion",
aus `7.c)` "$\mathsf{dom}\,\mathsf{qudr} = \ldots = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `7.d)` "$\mathsf{ran}\,\mathsf{qudr} = \ldots = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **21-2**: $\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`9.2:` Aus `8` und
aus `1`
folgt: qudr injektiv.

`10.e):` Aus `9.1`"$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$",
aus `7.d)` "$\mathsf{ran}\,\mathsf{qudr} = \ldots = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `9.2`"qudr injektiv"
folgt via **22-1(Def)**:
$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv.

Beweis **318-4** `f)` `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

1: Via **318-2(Def)** gilt: $\mathsf{qudr} = (\uparrow 2 \downharpoonleft \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

2: Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,\mathsf{qudr} = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

3: Aus 2 und
aus 1
folgt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2 \downharpoonleft \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

4: Aus 3 und
aus `VS`
folgt: $x \in \mathsf{dom}\,(\uparrow 2 \downharpoonleft \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

5: Aus 4 "$x \in \mathsf{dom}\,(\uparrow 2 \downharpoonleft \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$"
folgt via **258-11**: $(\uparrow 2 \downharpoonleft \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])(x) = x \uparrow 2$.

6: Aus 5 und
aus 1
folgt: $\boxed{\mathsf{qudr}(x) = x \uparrow 2}$

7: Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

8: Aus 6 und
aus 7
folgt: $\boxed{\mathsf{qudr}(x) = x \cdot x}$

□

318-5. Aus **318-2(Def)** und aus **318-4** folgen die ersten, erwarteten Aussagen über $\sqrt{.}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `e) - abcd) - f)`.

318-5(Satz)

a) $\sqrt{.}$ *Relation.*

b) $\sqrt{.}$ *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

d) $\mathsf{ran}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

e) $\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ *bijektiv.*

f) *Aus* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" *folgt* "$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$".

Beweis **318-5** `abcde)`

1: Via **318-4** gilt: $\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv.

2: Aus 1 "$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-6**: $\mathsf{qudr}^{-1} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv.

3.e): Aus 2 und
aus **318-2(Def)** "$\sqrt{.} = \mathsf{qudr}^{-1}$"
folgt: $\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv.

4.a): Aus 3.e) "$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-6**: $\sqrt{.}$ Relation.

4.b): Aus 3.e) "$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-6**: $\sqrt{.}$ Funktion.

4.c): Aus 3.e) "$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-3**: $\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

4.d): Aus 3.e) "$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-3**: $\mathsf{ran}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Beweis **318-5** `f)` `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv.

`2:` Aus `1` "$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3:` Aus `2` "$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **21-4**: $\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

□

318-6. Hier werden $\sqrt{\cdot}$ und qudr gemeinsam betrachtet.

<u>**318-6(Satz)**</u>

a) $\sqrt{\cdot}^{\,-1} = \mathsf{qudr}$.

b) $\mathsf{qudr} \circ \sqrt{\cdot} = \mathsf{id}_{\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$.

c) $\sqrt{\cdot} \circ \mathsf{qudr} = \mathsf{id}_{\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$.

d) *Aus* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" *folgt* "$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$" *und* "$(\sqrt{x}) \uparrow 2 = x$".

e) *Aus* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" *folgt* "$\sqrt{x \cdot x} = x$" *und* "$\sqrt{x \uparrow 2} = x$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **318-6**</u> a)

1: Aus **318-4**"qudr Relation"
folgt via **13-3**: $(\mathsf{qudr}^{-1})^{-1} = \mathsf{qudr}$.

2: Aus 1 und
aus **318-2(Def)**"$\sqrt{\cdot} = \mathsf{qudr}^{-1}$"
folgt: $\sqrt{\cdot}^{\,-1} = \mathsf{qudr}$.

bc)

1.1: Aus **318-3**"$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv"
folgt via **22-7**: $\mathsf{qudr} \circ \mathsf{qudr}^{-1} = \mathsf{id}_{\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$.

1.2: Aus **318-3**"$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektv"
folgt via **22-7**: $\mathsf{qudr}^{-1} \circ \mathsf{qudr} = \mathsf{id}_{\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$.

2.b): Aus 1.1 und
aus **318-2(Def)**"$\mathsf{qudr}^{-1} = \sqrt{\cdot}$"
folgt: $\mathsf{qudr} \circ \sqrt{\cdot} = \mathsf{id}_{\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$.

2.c): Aus 1.1 und
aus **318-2(Def)**"$\mathsf{qudr}^{-1} = \sqrt{\cdot}$"
folgt: $\sqrt{\cdot} \circ \mathsf{qudr} = \mathsf{id}_{\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$.

Beweis **318-6** `d)` `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1:` Aus **318-3**"$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv" und
aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **22-7**: $\mathsf{qudr}(\mathsf{qudr}^{-1}(x)) = x$.

`2:` Aus `1` und
aus **318-2(Def)**"$\mathsf{qudr}^{-1} = \sqrt{.}$"
folgt: $\mathsf{qudr}(\sqrt{x}) = x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-5**: $\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`4:` Aus `3`"$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-4**: $\mathsf{qudr}(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`5:` Aus `2` und
aus `4`
folgt: $\boxed{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x}$

`6:` Via **317-4** gilt: $(\sqrt{x}) \uparrow 2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $\boxed{(\sqrt{x}) \uparrow 2 = x}$

<u>Beweis **318-6**</u> `e)` `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

1: Aus **318-3** "$\mathsf{qudr} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ bijektiv" und
aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **22-7**: $\mathsf{qudr}^{-1}(\mathsf{qudr}(x)) = x$.

2: Aus 1 und
aus **318-2(Def)** "$\sqrt{\cdot} = \mathsf{qudr}^{-1}$"
folgt: $\sqrt{\mathsf{qudr}(x)} = x$.

3: Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-4**: $\mathsf{qudr}(x) = x \cdot x$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\boxed{\sqrt{x \cdot x} = x}$

5: Via **317-4** gilt: $x \cdot x = x \uparrow 2$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $\boxed{\sqrt{x \uparrow 2} = x}$

□

318-7. Nun wird **318-6** ein wenig spezialisiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `bca) - efd) - hgi) - klj)`.

318-7(Satz)

a) $\sqrt{0} = 0$.

b) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{0} = 0$.

c) $\sqrt{0 \cdot 0} = 0$.

d) $\sqrt{1} = 1$.

e) $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = 1$.

f) $\sqrt{1 \cdot 1} = 1$.

g) $\sqrt{+\infty} = +\infty$.

h) $\sqrt{+\infty} \cdot \sqrt{+\infty} = +\infty$.

i) $\sqrt{(+\infty) \cdot (+\infty)} = +\infty$.

j) $\sqrt{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$.

k) $\sqrt{\mathsf{nan}} \cdot \sqrt{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$.

l) $\sqrt{\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **318-7** `abc)`

`1.b)`: Aus **317-14**“$0 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{0} \cdot \sqrt{0} = 0$.

`1.c)`: Aus **317-14**“$0 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{0 \cdot 0} = 0$.

`2.a)`: Aus `1.c)` und
aus ·**schola**“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $\sqrt{0} = 0$.

<u>Beweis **318-7**</u> `def)`

`1:` Aus $\leq$**schola**“$0 \leq 1$”
folgt via **317-8**: $1 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2.e):` Aus `1`“$1 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = 1$.

`2.f):` Aus `1`“$1 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{1 \cdot 1} = 1$.

`3.d):` Aus `2.f)` und
aus $\cdot$**schola**“$1 \cdot 1 = 1$”
folgt: $\sqrt{1} = 1$.

`ghi)`

`1.h):` Aus **317-14**“$+\infty \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{+\infty} \cdot \sqrt{+\infty} = +\infty$.

`1.g):` Aus **317-14**“$+\infty \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{(+\infty) \cdot (+\infty)} = +\infty$.

`2.i):` Aus `1.g)` und
aus **AAVI**“$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$”
folgt: $\sqrt{+\infty} = +\infty$.

`jkl)`

`1.k):` Aus **317-14**“$\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{\mathsf{nan}} \cdot \sqrt{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$.

`1.l):` Aus **317-14**“$\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt via **318-6**: $\sqrt{\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$.

`2.j):` Aus `1.l)` und
aus **97-5**“$\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $\sqrt{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$.

$\square$

318-8. Die in **318-6**`de)` steckenden Aussagen können mit Hilfe von **318-8** etwas von der Sperrigkeit der die Menge $\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$ involvierenden Voraussetzung befreit werden.

318-8(Satz)

a) *Aus* "$x=0$" *folgt* "$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$" *und* "$\sqrt{x\cdot x}=x$" *und* "$(\sqrt{x})\uparrow 2=x$" *und* "$\sqrt{x\uparrow 2}=x$".

b) *Aus* "$x=+\infty$" *folgt* "$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$" *und* "$\sqrt{x\cdot x}=x$" *und* "$(\sqrt{x})\uparrow 2=x$" *und* "$\sqrt{x\uparrow 2}=x$".

c) *Aus* "$x=\mathsf{nan}$" *folgt* "$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$" *und* "$\sqrt{x\cdot x}=x$" *und* "$(\sqrt{x})\uparrow 2=x$" *und* "$\sqrt{x\uparrow 2}=x$".

d) *Aus* "$0\le x$" *folgt* "$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$" *und* "$\sqrt{x\cdot x}=x$" *und* "$(\sqrt{x})\uparrow 2=x$" *und* "$\sqrt{x\uparrow 2}=x$".

e) *Aus* "$0<x$" *folgt* "$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$" *und* "$\sqrt{x\cdot x}=x$" *und* "$(\sqrt{x})\uparrow 2=x$" *und* "$\sqrt{x\uparrow 2}=x$".

$\le$`.RECH`-**Notation**.

Beweis **318-8** `a)` `VS` gleich $x=0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x=0$"
folgt via **317-8**: $x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$"
folgt via **318-6**:
$$(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x)\wedge(\sqrt{x\cdot x}=x)\wedge((\sqrt{x})\uparrow 2=x)\wedge(\sqrt{x\uparrow 2}=x).$$

`b)` `VS` gleich $x=+\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x=+\infty$"
folgt via **317-8**: $x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$"
folgt via **318-6**:
$$(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x)\wedge(\sqrt{x\cdot x}=x)\wedge((\sqrt{x})\uparrow 2=x)\wedge(\sqrt{x\uparrow 2}=x).$$

<u>Beweis</u> **<u>318-8</u>** `c)` `VS` gleich $x = \mathsf{nan}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-6**:
$$(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x) \wedge (\sqrt{x \cdot x} = x) \wedge ((\sqrt{x}) \uparrow 2 = x) \wedge (\sqrt{x \uparrow 2} = x).$$

`d)` `VS` gleich $0 \leq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-6**:
$$(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x) \wedge (\sqrt{x \cdot x} = x) \wedge ((\sqrt{x}) \uparrow 2 = x) \wedge (\sqrt{x \uparrow 2} = x).$$

`e)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-6**:
$$(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x) \wedge (\sqrt{x \cdot x} = x) \wedge ((\sqrt{x}) \uparrow 2 = x) \wedge (\sqrt{x \uparrow 2} = x).$$

□

318-9. Die Gleichung $(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$ gilt auf jeden Fall für $x, y \in \mathbb{T}$ *oder* für $x, y \in \mathbb{C}$. Dass diese Gleichung *nicht immer gilt*, wird in **318-10,11** thematisiert.

318-9(Satz)

a) *Aus* “$x, y \in \mathbb{T}$”*folgt* “$(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$”.

b) *Aus* “$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”*folgt* “$(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$”.

c) *Aus* “$x, y \in \mathbb{C}$”*folgt* “$(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$”.

d) *Aus* “$x, y \in \mathbb{R}$”*folgt* “$(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$”.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **318-9** `a)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x, y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{T}$” und
aus `VS` gleich “$x \ldots \in \mathbb{T}$”
folgt via **AGM***$\mathbb{T}$: $y \cdot (y \cdot x) = (y \cdot y) \cdot x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via **317-21**: $y \uparrow 2 \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$x \ldots \in \mathbb{T}$” und
aus `1.1`“$x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AGM***$\mathbb{T}$: $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot (x \cdot y))$.

`2.2:` Aus `VS` gleich “$x \ldots \in \mathbb{T}$” und
aus `1.3`“$y \uparrow 2 \in \mathbb{T}$”
folgt via **AGM***$\mathbb{T}$: $x \cdot (x \cdot y \uparrow 2) = (x \cdot x) \cdot y \uparrow 2$.

`3:` $$(x \cdot y) \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} x \cdot (y \cdot (x \cdot y)) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (y \cdot (y \cdot x))$$
$$\stackrel{1.2}{=} x \cdot ((y \cdot y) \cdot x) \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot (y \uparrow 2 \cdot x) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (x \cdot y \uparrow 2)$$
$$\stackrel{2.2}{=} (x \cdot x) \cdot y \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2.$$

<u>Beweis **318-9**</u> `b)` `VS` gleich $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $x, y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$x, y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$.

`c)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $y \cdot (y \cdot x) = (y \cdot y) \cdot x$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **317-21**: $y \uparrow 2 \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{C}$" und
aus `1.1` "$x \cdot y \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot (y \cdot (x \cdot y))$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{C}$" und
aus `1.3` "$y \uparrow 2 \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $x \cdot (x \cdot y \uparrow 2) = (x \cdot x) \cdot y \uparrow 2$.

`3:` $$(x \cdot y) \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} x \cdot (y \cdot (x \cdot y)) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (y \cdot (y \cdot x))$$
$$\stackrel{1.2}{=} x \cdot ((y \cdot y) \cdot x) \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot (y \uparrow 2 \cdot x) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (x \cdot y \uparrow 2)$$
$$\stackrel{2.2}{=} (x \cdot x) \cdot y \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2.$$

318-10. Keineswegs ist immer “$(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$” sicher gestellt.

318-10.Bemerkung

Die Aussage
“$(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

318-11. Für $x = (+\infty) + \mathsf{i}$ und $y = 1 + \mathsf{i}$ gilt $(x \cdot y) \uparrow 2 \neq x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$.

318-11.BEISPIEL Es gelte:

$\rightarrow$) $x = (+\infty) + \mathsf{i}$.

$\rightarrow$) $y = 1 + \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

b) $x \uparrow 2 = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

c) $y \uparrow 2 = 2 \cdot \mathsf{i}$.

d) $(x \cdot y) \uparrow 2 = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

e) $x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 = (-\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

f) $(x \cdot y) \uparrow 2 \neq x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2$.

318-12. Aus $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ folgt $1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

318-12(Satz)

Aus “$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” *folgt* “$1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **318-12** `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

$\leq$-**Notation**.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **318-8**: $(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`
folgt: $1 : x = 1 : 0$.

`3:` Aus 2 und
aus :**schola**“$1 : 0 = 0$”
folgt: $1 : x = 0$.

`4:` Aus 3“$1 : x = 0$”
folgt via **317-8**: $1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1.2.Fall` $0 < x < +\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 < x < +\infty$”
folgt via **107-12**: $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`“$0 < x \ldots$” und
aus 2“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-1**: $0 < 1 : x$.

`4:` Aus 3“$0 < 1 : x$”
folgt via **317-8**: $1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

...

<u>Beweis **318-12**</u> `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus `1.3.Fall`
folgt: $1 : x = 1 : (+\infty)$.

`3:` Aus 2 und
aus **123-11**“$1 : (+\infty) = 0$”
folgt: $1 : x = 0$.

`4:` Aus 3“$1 : x = 0$”
folgt via **317-8**: $1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`1.4.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.4.Fall`
folgt: $1 : x = 1 : \mathsf{nan}$.

`3:` Aus 2 und
aus **123-11**“$1 : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$”
folgt: $1 : x = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3“$1 : x = \mathsf{nan}$”
folgt via **317-8**: $1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $1 : x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

□

318-13. Die Summe und das Produkt und der Quotient von $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ sind wieder in $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

318-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Dann folgt:

a) $x + y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

b) $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

c) $x : y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

RECH-**Notation**.

Beweis **318-13**

$\leq$-**Notation**.

---

a)

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$x \ldots \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **317-8**: $(0 \leq x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **317-8**: $(0 \leq y) \vee (y = \mathsf{nan})$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:

$$\begin{array}{rr} & 0 \leq x, y \\ \vee & (0 \leq x) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \leq y) \\ \vee & x, y = \mathsf{nan}. \end{array}$$

Fallunterscheidung

2.1.Fall $0 \leq x, y$.

3: Aus 2.1.Fall "$0 \leq x, y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 \leq x + y$.

4: Aus 3 "$0 \leq x + y$"
folgt via **317-8**: $x + y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

...

Beweis **318-13** `a)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(0 \le x) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$0 \le x \ldots$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.2.Fall`“$\ldots y = \mathsf{nan}$”
folgt: $x + y = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`“$x + y = \mathsf{nan}$”
folgt via **317-8**: $x + y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.3.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (0 \le y)$.

`3:` Aus `2.3.Fall`“$\ldots 0 \le y$”
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`“$y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + y = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.3.Fall`“$x = \mathsf{nan} \ldots$”
folgt: $x + y = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`“$x + y = \mathsf{nan}$”
folgt via **317-8**: $x + y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

...

Beweis **318-13** `a)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $x, y = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2.4.Fall` folgt: $x + y = \mathsf{nan} + \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3` und aus **97-1** "$\mathsf{nan} + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" folgt: $x + y = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4` "$x + y = \mathsf{nan}$" folgt via **317-8**: $x + y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x + y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`b)`

`1.1:` Aus →) "$x \ldots \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" folgt via **317-8**: $(x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus →) "$\ldots y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" folgt via **317-8**: $(y = 0) \vee (0 < y) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt:

$$\begin{aligned} & x, y = 0 \\ \vee\ & (x = 0) \wedge (0 < y) \\ \vee\ & (x = 0) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (y = 0) \\ \vee\ & 0 < x, y \\ \vee\ & (0 < x) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee\ & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = 0) \\ \vee\ & (x = \mathsf{nan}) \wedge (0 < y) \\ \vee\ & x, y = \mathsf{nan}. \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **318-13** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x, y = 0.$

`3:` Aus `2.1.Fall`
folgt: $x \cdot y = 0 \cdot 0.$

`4:` Aus `3` und
aus $\cdot$**schola**“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $x \cdot y = 0.$

`5:` Aus `4`“$x \cdot y = 0$”
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`2.2.Fall` $(x = 0) \wedge (0 < y).$

`3.1:` Aus `2.2.Fall`“$x = 0 \ldots$”
folgt: $x \cdot y = 0 \cdot y.$

`3.2:` Aus `2.2.Fall`“$\ldots 0 < y$”
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}.$

`4:` Aus `3.2`“$y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: y Zahl.

`5:` Aus `4`“y Zahl”
folgt via **FSM0**: $0 \cdot y = 0.$

`6:` Aus `5` und
aus `3.1`
folgt: $x \cdot y = 0.$

`7:` Aus `6`“$x \cdot y = 0$”
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`2.3.Fall` $(x = 0) \wedge (y = \mathsf{nan}).$

`3:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $x \cdot y = 0 \cdot \mathsf{nan}.$

`4:` Aus `3`“$x \cdot y = 0 \cdot \mathsf{nan}$” und
aus **AAVI**“$0 \cdot \mathsf{nan} = 0$”
folgt: $x \cdot y = 0.$

`5:` Aus `4`“$x \cdot y = 0$”
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

...

<u>Beweis</u> **318-13** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(0 < x) \wedge (y = 0)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots y = 0$"
folgt: $x \cdot y = x \cdot 0$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`5:` Aus `4`"x Zahl"
folgt via **FSM0**: $x \cdot 0 = 0$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.1`
folgt: $x \cdot y = 0$.

`7:` Aus `6`"$x \cdot y = 0$"
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.5.Fall` $0 < x, y$.

`3:` Aus `2.5.Fall`"$0 < x, y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < x \cdot y$.

`4:` Aus `3`"$0 < x \cdot y$"
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

...

Beweis **318-13** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.6.Fall` $(0 < x) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2.6.Fall`“$\ldots y = \mathsf{nan}$”
folgt: $x \cdot y = x \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3.2`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.1`“$0 \neq x$” und
aus `4`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.3`
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`“$x \cdot y = \mathsf{nan}$”
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.7.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = 0)$.

`3:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan} \cdot 0$.

`4:` Aus `3` und
aus **AAVI**“$\mathsf{nan} \cdot 0 = 0$”
folgt: $x \cdot y = 0$.

`5:` Aus `4`“$x \cdot y = 0$”
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

...

<u>Beweis</u> **318-13** `b)` ...

`Fallunterscheidung`

...

`2.8.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (0 < y)$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq y$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2.8.Fall`"$x = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan} \cdot y$.

`4:` Aus `3.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.1`"$0 \neq y$" und
aus `4`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot y = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5` und
aus `3.3`
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`"$x \cdot y = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.9.Fall` $x, y = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3` und
aus **97-5**"$\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot y = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot y = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

<u>Beweis **318-13**</u> `c)`

`1:` Aus →) “ $\ldots y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ ”
folgt via **318-12**: $1 : y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2:` Aus →) “ $x \ldots \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ ” und
aus `1` “ $1 : y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cdot (1 : y) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $x : y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

□

318-14. Eine der bekannten Gleichungen für $\sqrt{.}$ trifft Aussagen über die Verknüpfung von Produkt und $\sqrt{.}$.

318-14(Satz)

$$\textit{Aus } “x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]” \textit{ folgt } “\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}”.$$

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **318-14**</u> `VS` gleich $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-5**: $\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-5**: $\sqrt{y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`1.3`: Aus `VS` gleich "$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-13**: $x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`1.4`: Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-6**: $(\sqrt{x}) \uparrow 2 = x$.

`1.5`: Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-6**: $(\sqrt{y}) \uparrow 2 = y$.

`2.1`: Aus `1.1` "$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" und
aus `1.2` "$\sqrt{y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-13**: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`2.2`: Aus `1.1` "$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" und
aus `1.2` "$\sqrt{y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-9**: $(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) \uparrow 2 = (\sqrt{x}) \uparrow 2 \cdot (\sqrt{y}) \uparrow 2$.

`2.3`: Aus `1.3` "$x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-6**: $(\sqrt{x \cdot y}) \uparrow 2 = x \cdot y$.

`2.4`: Aus `1.3` "$x \cdot y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-5**: $\sqrt{x \cdot y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`3`: Aus `2.2`,
aus `1.4` und
aus `1.5`
folgt: $(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) \uparrow 2 = x \cdot y$.

`4`: Aus `2.3` und
aus `3`
folgt: $(\sqrt{x \cdot y}) \uparrow 2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) \uparrow 2$.

`5`: Aus `4` "$(\sqrt{x \cdot y}) \uparrow 2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}) \uparrow 2$",
aus `2.4` "$\sqrt{x \cdot y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" und
aus `2.1` "$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **317-2**: $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

□

Analysis: $x \uparrow 2 = y \in \mathbb{T}$.

Ersterstellung: 26/11/14 **Letzte Änderung: 26/11/14**

319-1. Gemäß **318-5** folgt aus $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ die Aussage $\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$. In dieser Aussage kann die Voraussetzung freundlicher gestaltet und es kann $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$ eingesetzt werden.

319-1(Satz)

a) *Aus* “$x = 0$” *folgt* “$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” *und* “$\sqrt{x} \in \mathbb{T}$”.

b) *Aus* “$x = +\infty$” *folgt* “$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” *und* “$\sqrt{x} \in \mathbb{T}$”.

c) *Aus* “$x = \mathsf{nan}$” *folgt* “$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” *und* “$\sqrt{x} \in \mathbb{T}$”.

d) *Aus* “$0 \le x$” *folgt* “$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” *und* “$\sqrt{x} \in \mathbb{T}$”.

e) *Aus* “$0 < x$” *folgt* “$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” *und* “$\sqrt{x} \in \mathbb{T}$”.

$\le$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **319-1** a) `VS` gleich $x = 0$.

1: Aus `VS` gleich “$x = 0$”
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

2: Aus 1“$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **318-5**: $\boxed{\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]}$

3: Aus 2“$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus **317-11**“$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **0-4**: $\boxed{\sqrt{x} \in \mathbb{T}}$

<u>Beweis **319-1**</u> `b)` `VS` gleich $x = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = +\infty$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-5**: $\boxed{\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$

`3:` Aus `2`"$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus **317-11**"$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $\boxed{\sqrt{x} \in \mathbb{T}}$

`c)` `VS` gleich $x = \mathsf{nan}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-5**: $\boxed{\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$

`3:` Aus `2`"$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus **317-11**"$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $\boxed{\sqrt{x} \in \mathbb{T}}$

`d)` `VS` gleich $0 \le x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-5**: $\boxed{\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$

`3:` Aus `2`"$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus **317-11**"$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $\boxed{\sqrt{x} \in \mathbb{T}}$

Beweis **319-1** `e)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 < x$”
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2:` Aus `1`“$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **318-5**: $\boxed{\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]}$

`3:` Aus `2`“$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus **317-11**“$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **0-4**: $\boxed{\sqrt{x} \in \mathbb{T}}$

□

319-2. Aus $\mathsf{i} \cdot x = -y$ und y Zahl folgt $x = \mathsf{i} \cdot y$.

<u>**319-2(Satz)**</u>

a) *Aus* "$\mathsf{i} \cdot x = -y$" *folgt* "$-x = -\mathsf{i} \cdot y$".

b) *Aus* "$\mathsf{i} \cdot x = -y$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x = \mathsf{i} \cdot y$".

<u>RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **319-2**</u> a) VS gleich $\mathsf{i} \cdot x = -y$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{i} \cdot x = -y$"
folgt via **133-3**: $-x = \mathsf{i} \cdot (-y)$.

2: Via **FS**$-\cdot$ gilt: $\mathsf{i} \cdot (-y) = -\mathsf{i} \cdot y$.

3: Aus 2 und
aus 1
folgt: $-x = -\mathsf{i} \cdot y$.

b) VS gleich $(\mathsf{i} \cdot x = -y) \wedge (y \text{ Zahl})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **117-4**: $-y$ Zahl.

2: Aus VS gleich "$\mathsf{i} \cdot x = -y \ldots$" und
aus 1 "$-y$ Zahl"
folgt via **133-3**: $x = -\mathsf{i} \cdot (-y)$.

3: Via **FS**$-\cdot$
gilt: $-\mathsf{i} \cdot (-y) = (-\mathsf{i}) \cdot (-y)$.

4.1: Aus 3 und
aus 2
folgt: $x = (-\mathsf{i}) \cdot (-y)$.

4.2: Via **FS**$-\cdot$
gilt: $(-\mathsf{i}) \cdot (-y) = \mathsf{i} \cdot y$.

5: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $x = \mathsf{i} \cdot y$.

□

319-3. Hier werden in Form einer “impliziten Fallunterscheidung” die Gleichungen $x \uparrow 2 = y$ mit $y \in \mathbb{T}$ diskutiert.

319-3(Satz)

a) *“*$x \uparrow 2 = \mathsf{nan}$*” genau dann, wenn “*$(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$*”.*

b) *Aus “*$x \uparrow 2 = y$*” und “*$0 \le y$*” folgt “*$(x = \sqrt{y}) \vee (x = -\sqrt{y})$*”.*

c) *Aus “*$0 \le y$*” und “*$(x = \sqrt{y}) \vee (x = -\sqrt{y})$*” folgt “*$x \uparrow 2 = y$*”.*

d) *Aus “*$x \uparrow 2 = y$*” und “*$y \le 0$*” folgt “*$(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y})$*”.*

e) *Aus “*$y \le 0$*” und “*$(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y})$*” folgt “*$x \uparrow 2 = y$*”.*

f) *“*$x \uparrow 2 = +\infty$*” genau dann, wenn “*$(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$*”.*

g) *“*$x \uparrow 2 = -\infty$*” genau dann, wenn “*$(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$*”.*

$\le$.RECH-**Notation**.

Beweis **319-3** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x \uparrow 2 = \mathsf{nan}$.

1: Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

2: Aus 1 und
aus VS
folgt: $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

3: Aus 2“$x \cdot x = \mathsf{nan}$”
folgt via **135-7**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

1: Aus VS gleich “$(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$”
folgt via **135-7**: $x \cdot x = \mathsf{nan}$.

2: Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

3: Aus 2 und
aus 1
folgt: $x \uparrow 2 = \mathsf{nan}$.

<u>Beweis **319-3**</u> `b)` `VS` gleich $(x \uparrow 2 = y) \wedge (0 \leq y)$.

`1.1:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **318-8**: $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$x \uparrow 2 = y \ldots$"
folgt: $x \cdot x = y$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **319-1**: $\sqrt{y} \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt: $0 \leq x \cdot x$.

`3.2:` Aus `1.2` und
aus `2.1`
folgt: $x \cdot x = \sqrt{y} \cdot \sqrt{y}$.

`4:` Aus `3.1`"$0 \leq x \cdot x$"
folgt via **127-8**: $x \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `3.2`"$x \cdot x = \sqrt{y} \cdot \sqrt{y}$",
aus `5`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2`"$\sqrt{y} \in \mathbb{T}$"
folgt via **317-7**: $(x = \sqrt{y}) \vee (x = -\sqrt{y})$.

<u>Beweis **319-3**</u> `c)` `VS` gleich $(0 \le y) \wedge ((x = \sqrt{y}) \vee (x = -\sqrt{y}))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \le y \ldots$"
folgt via **318-8**: $(\sqrt{y}) \uparrow 2 = y$.

`2:` Nach `VS` gilt: $(x = \sqrt{y}) \vee (x = -\sqrt{y})$.
`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = \sqrt{y}$.
Aus `2.1.Fall` und
aus `1`
folgt: $x \uparrow 2 = y$.

`2.2.Fall` $x = -\sqrt{y}$.

$$x \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot x \stackrel{\text{2.2.Fall}}{=} (-\sqrt{y}) \cdot (-\sqrt{y}) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \sqrt{y} \cdot \sqrt{y} \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\sqrt{y}) \uparrow 2 \stackrel{1}{=} y.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \uparrow 2 = y$.

`d)` `VS` gleich $(x \uparrow 2 = y) \wedge (y \le 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \le 0$"
folgt via **109-16**: $0 \le -y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \uparrow 2 = y \ldots$"
folgt: $-x \uparrow 2 = -y$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`2.2:` Aus `1.1`"$0 \le -y$"
folgt via **319-1**: $\sqrt{-y} \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `1.2`
folgt: $-x \cdot x = -y$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\sqrt{-y} \in \mathbb{T}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $\sqrt{-y}$ Zahl.

`4:` Via **133-2** gilt: $(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot x) = -x \cdot x$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot x) = -y$.

...

<u>Beweis **319-3**</u> `d)` `VS` gleich $(x \uparrow 2 = y) \wedge (y \leq 0)$.

...

`6:` Via **317-4** gilt: $(\mathsf{i} \cdot x) \uparrow 2 = (\mathsf{i} \cdot x) \cdot (\mathsf{i} \cdot x)$.

`7:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $(\mathsf{i} \cdot x) \uparrow 2 = -y$.

`8:` Aus `7`"$(\mathsf{i} \cdot x) \uparrow 2 = -y$" und
aus `1`"$0 \leq -y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(\mathsf{i} \cdot x = \sqrt{-y}) \vee (\mathsf{i} \cdot x = -\sqrt{-y})$.

`Fallunterscheidung`

`8.1.Fall` $\mathsf{i} \cdot x = \sqrt{-y}$.

Aus `8.1.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x = \sqrt{-y}$" und
aus `3.2`"$\sqrt{-y}$ Zahl"
folgt via **133-3**: $x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}$.

`8.2.Fall` $\mathsf{i}x = -\sqrt{-y}$.

Aus `8.2.Fall`"$\mathsf{i} \cdot x = -\sqrt{-y}$" und
aus `3.2`"$\sqrt{-y}$ Zahl"
folgt via **319-2**: $x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y})$.

`e)` `VS` gleich $(y \leq 0) \wedge ((x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$y \leq 0 \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$0 \leq -y$"
folgt via **318-8**: $\sqrt{-y} \cdot \sqrt{-y} = -y$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **FS**$--$: $y = -(-y)$.

...

<u>Beweis **319-3**</u> `e)` `VS` gleich $(y \le 0) \wedge ((x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}))$.

...

`4:` Nach `VS` gilt: $(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y})$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}$.

$$x \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot x \stackrel{\text{4.1.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \cdot (\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -\sqrt{-y} \cdot \sqrt{-y} \stackrel{2.1}{=} -(-y) \stackrel{3}{=} y.$$

`4.2.Fall` $x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}$.

$$x \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot x \stackrel{\text{4.2.Fall}}{=} (-\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \cdot (-\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \cdot (\mathsf{i} \cdot \sqrt{-y}) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -\sqrt{-y} \cdot \sqrt{-y} \stackrel{2.1}{=} -(-y) \stackrel{3}{=} y.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \uparrow 2 = y$.

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \uparrow 2 = +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \uparrow 2 = +\infty$" und
aus **165-3**"$0 \le +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x = \sqrt{+\infty}) \vee (x = -\sqrt{+\infty})$.

`2:` Aus 1 und
aus **318-7**"$\sqrt{+\infty} = +\infty$"
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -(+\infty))$.

`3:` Aus 2 und
aus **AAVI**"$-(+\infty) = -\infty$"
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

<u>Beweis **319-3** `f)`</u> $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x = +\infty$.
Aus `0.1.Fall` und
aus **317-14**“$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$”
folgt: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`0.2.Fall` $x = -\infty$.
Aus `0.2.Fall` und
aus **317-14**“$(-\infty) \uparrow 2 = +\infty$”
folgt: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \uparrow 2 = -\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \uparrow 2 = -\infty$” und
aus **165-3**“$-\infty \leq 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$$(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{-(-\infty)}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{-(-\infty)}).$$

`2:` Aus `1` und
aus **AAVI**“$-(-\infty) = +\infty$”
folgt: $(x = \mathsf{i} \cdot \sqrt{+\infty}) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot \sqrt{+\infty})$.

`3:` Aus `2` und
aus **318-7**“$\sqrt{+\infty} = +\infty$”
folgt: $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = -\mathsf{i} \cdot (+\infty))$.

`4:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $-\mathsf{i} \cdot (+\infty) = \mathsf{i} \cdot (-(+\infty))$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-(+\infty)))$.

`6:` Aus `5` und
aus **AAVI**“$-(+\infty) = -\infty$”
folgt: $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

<u>Beweis</u> **319-3** `g)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \vee (x = \mathsf{i} \cdot (-\infty))$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$

$$x \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot x \stackrel{\text{0.1.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot (+\infty)) \cdot (\mathsf{i} \cdot (+\infty)) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty.$$

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$

$$x \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} x \cdot x \stackrel{\text{0.2.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot (-\infty)) \cdot (\mathsf{i} \cdot (-\infty)) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -(-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty.$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \uparrow 2 = -\infty$.

$\square$

Mengenlehre: streng isoton. injektiv und streng isoton.
streng antiton. injektiv und streng antiton.

Ersterstellung: 27/11/14 **Letzte Änderung: 03/12/14**

320-1. Bei der Überarbeitung von **#49,#52** entdeckte ich Fehlendes.

320-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *M Vollständig.*

`ii)` $\forall\alpha,\beta:((0\neq\alpha)\wedge(\beta\textit{ untere }M\_\textit{Schranke von }\alpha))$
$\Rightarrow(\exists\Omega:\Omega\textit{ ist }M\_\textit{Infimum von }\alpha)$.

`iii)` $\forall\alpha,\beta:((0\neq\alpha)\wedge(\beta\textit{ obere }M\_\textit{Schranke von }\alpha))$
$\Rightarrow(\exists\Omega:\Omega\textit{ ist }M\_\textit{Supremum von }\alpha)$.

Beweis **320-1** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich M Vollständig.

`1:` Aus `VS` gleich "M Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

`2:` Aus `1`"M unten Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: $\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha))$
$\Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha))$
$\Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \wedge (\beta$ untere M_Schranke von $\alpha))$
$\Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$"
folgt via **49-1(Def)**: M unten Vollständig.

`2:` Aus `1`"M unten Vollständig"
folgt via **49-2**: M oben Vollständig.

`3:` Aus `2`"M oben Vollständig"
folgt via **49-1(Def)**: $\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha))$
$\Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha))$
$\Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\forall\alpha, \beta : ((0 \neq \alpha) \wedge (\beta$ obere M_Schranke von $\alpha))$
$\Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$"
folgt via **49-1(Def)**: M oben Vollständig.

`2:` Aus `1`"M oben Vollständig"
folgt via **49-3**: M Vollständig.

$\square$

320-2. Bei der Überarbeitung von **#51,#52** entdeckte ich Fehlendes.

320-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` M *Total Vollständig.*

`ii)` $\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ *ist* M*_Infimum von* $\alpha)$.

`iii)` $\forall\alpha, : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ *ist* M*_Supremum von* $\alpha)$.

Beweis **320-2** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich M Total Vollständig.

1: Aus `VS` gleich "M Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

2: Aus 1"M unten Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**:
$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$.

1: Aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{ran}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Infimum von $\alpha)$"
folgt via **51-1(Def)**: M unten Total Vollständig.

2: Aus 1"M unten Total Vollständig"
folgt via **51-3**: M oben Total Vollständig.

3: Aus 2"M oben Total Vollständig"
folgt via **51-1(Def)**:
$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$.

1: Aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \subseteq \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\exists\Omega : \Omega$ ist M_Supremum von $\alpha)$"
folgt via **51-1(Def)**: M oben Total Vollständig.

2: Aus 1"M oben Total Vollständig"
folgt via **51-3**: M Total Vollständig.

□

320-3. In Anlehnung an klassische Konzepte der Analysis werden nun die Begriffe *streng* M_isoton/M_antiton definiert.

320-3(Definition)

1) “E **streng** M**_isoton auf** z” genau dann, wenn

“E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z” .

2) “E **streng** M**_antiton auf** z” genau dann, wenn

“E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _antiton auf z” .

320-4. Anders als für die vertrauten Funktionen folgt aus streng isoton/antiton nicht ohne Weiteres isoton/antiton.

320-4.Bemerkung

a) Die Aussage
"(E streng M_isoton auf z) $\Rightarrow$ (E ist M_isoton auf z)"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

b) Die Aussage
"(E streng M_antiton auf z) $\Rightarrow$ (E ist M_antiton auf z)"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

320-5. Ist E steng $\leq$ _isoton/streng $\leq$ _antiton auf z, so ist E nicht notwendiger Weise $\leq$ _isoton/$\leq$ _antiton auf z.

<u>**320-5.BEISPIEL**</u> Es gelte:

$\rightarrow$) $E = \{(1,0),(1,1)\}$.

$\rightarrow$) $z = \{1\}$.

Dann folgt:

a) E streng $\leq$ _isoton auf z.

b) E streng $\leq$ _antiton auf z.

c) $\neg(E$ ist $\leq$ _isoton auf $z)$.

d) $\neg(E$ ist $\leq$ _antiton auf $z)$.

Ad ab): Es gibt keine $\alpha, \beta \in \{1\}$ mit $\alpha < \beta$.
Ad c): Mit $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 1$ und $\delta = 0$ gilt zwar $\alpha, \beta \in z$ und $\alpha \leq \beta$ und $(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta) \in E$, doch es folgt *eben nicht* $\gamma \leq \delta$.
Ad d): Mit $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = 0$ und $\delta = 1$ gilt zwar $\alpha, \beta \in z$ und $\alpha \leq \beta$ und $(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta) \in E$, doch es folgt *eben nicht* $\delta \leq \gamma$.

320-6. Es gibt eine nahe liegende Forderung, um von strenger Isotonie zu Isotonie zu gelangen.

320-6(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *E streng M_isoton auf z.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha \in z) \wedge ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in E)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)$.

Dann folgt "E ist M_isoton auf z".

Beweis **320-6**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "E streng M_isoton auf z"
folgt via **320-3(Def)**: E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z.

2: Aus 1 "E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`Thema3.1` $(\gamma,\delta \in z) \wedge (\gamma\_M\_\delta) \wedge ((\gamma,\epsilon),(\delta,\phi) \in E)$.

4: Aus Thema3.1 "$\ldots \gamma\_M\_\delta \ldots$"
folgt via **41-5**: $(\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta) \vee (\gamma = \delta)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$.

5: Aus Thema3.1 "$\gamma,\delta \in z \ldots$",
aus 4.1.Fall "$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$",
aus Thema3.1 "$\ldots (\gamma,\epsilon),(\delta,\phi) \in E$" und
aus 1 "E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf E"
folgt via **81-1(Def)**: $\epsilon\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\phi$.

6: Aus 5 "$\epsilon\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$"
folgt via **41-3**: ϵ_M_ϕ.

...

...

Beweis **320-6** ...

`Thema3.1` $(\gamma, \delta \in z) \wedge (\gamma \_M\_ \delta) \wedge ((\gamma, \epsilon), (\delta, \phi) \in E)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $\gamma = \delta$.

`5:` Aus `4.2.Fall` "$\gamma = \delta$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\gamma, \epsilon) = (\delta, \epsilon)$.

`6:` Aus `5` und
aus `Thema3.1` "$\ldots (\gamma, \epsilon) \ldots \in E$"
folgt: $(\delta, \epsilon) \in E$.

`7:` Aus `Thema3.1` $\ldots \delta \in z \ldots$,
aus `6` "$(\delta, \epsilon) \in E$",
aus `Thema3.1` "$\ldots (\delta, \phi) \in E$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in E)) \Rightarrow (\beta \_M\_ \gamma)$"
folgt: $\epsilon \_M\_ \phi$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\epsilon \_M\_ \phi$.

Ergo `Thema3.1`:

`A1`	"$\forall \gamma, \delta, \epsilon, \phi : ((\gamma, \delta \in z) \wedge (\gamma \_M\_ \delta) \wedge ((\gamma, \epsilon), (\delta, \phi) \in E)) \Rightarrow (\epsilon \_M\_ \phi)$"

`3.1:` Aus 2 "$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta, \epsilon, \phi : ((\gamma, \delta \in z) \wedge (\gamma \_M\_ \delta) \wedge ((\gamma, \epsilon), (\delta, \phi) \in E)) \Rightarrow (\epsilon \_M\_ \phi)$"
folgt via **81-2**: E ist M_isoton auf z.

□

320-7. Es gibt eine nahe liegende Forderung, um von strenger Antitonie zu Antitonie zu gelangen.

320-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *E streng M_antiton auf z.*

$\rightarrow\!)$ $\forall\alpha,\beta,\gamma : ((\alpha \in z) \wedge ((\alpha,\beta),(\alpha,\gamma) \in E)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)$.

Dann folgt "E ist M_antiton auf z".

Beweis **320-7**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "E streng M_antiton auf z"
folgt via **320-3(Def)**: E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _antiton auf z.

2: Aus 1 "E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _antiton auf z"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`Thema3.1` $(\gamma,\delta \in z) \wedge (\gamma\_M\_\delta) \wedge ((\gamma,\epsilon),(\delta,\phi) \in E)$.

4: Aus `Thema3.1` "$\ldots \gamma\_M\_\delta \ldots$"
folgt via **41-5**: $(\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta) \vee (\gamma = \delta)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$.

5: Aus `Thema3.1` "$\gamma,\delta \in z \ldots$",
aus `4.1.Fall` "$\gamma\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\delta$",
aus `Thema3.1` "$\ldots (\gamma,\epsilon),(\delta,\phi) \in E$" und
aus 1 "E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _antiton auf E"
folgt via **81-1(Def)**: $\phi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\epsilon$.

6: Aus 5 "$\phi\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_\epsilon$"
folgt via **41-3**: ϕ_M_ϵ.

...

...

<u>Beweis **320-7**</u> ...

`Thema3.1` $(\gamma, \delta \in z) \wedge (\gamma\_M\_\delta) \wedge ((\gamma, \epsilon), (\delta, \phi) \in E)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`4.2.Fall` $\gamma = \delta$.

`5:` Aus `4.2.Fall`"$\gamma = \delta$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\gamma, \epsilon) = (\delta, \epsilon)$.

`6:` Aus `5` und
aus `Thema3.1`"$\ldots (\gamma, \epsilon) \ldots \in E$"
folgt: $(\delta, \epsilon) \in E$.

`7:` Aus `Thema3.1`$\ldots \delta \in z \ldots$,
aus `Thema3.1`"$\ldots (\delta, \phi) \in E$",
aus `6`"$(\delta, \epsilon) \in E$" und
aus →)"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha \in z) \wedge ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in E)) \Rightarrow (\beta\_M\_\gamma)$"
folgt: ϕ_M_ϵ.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: ϕ_M_ϵ.

Ergo `Thema3.1`:

`A1` | "$\forall \gamma, \delta, \epsilon, \phi : ((\gamma, \delta \in z) \wedge (\gamma\_M\_\delta) \wedge ((\gamma, \epsilon), (\delta, \phi) \in E)) \Rightarrow (\phi\_M\_\epsilon)$"

`3.1:` Aus 2"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \gamma, \delta, \epsilon, \phi : ((\gamma, \delta \in z) \wedge (\gamma\_M\_\delta) \wedge ((\gamma, \epsilon), (\delta, \phi) \in E)) \Rightarrow (\phi\_M\_\epsilon)$"
folgt via **81-3**: E ist M_antiton auf z.

□

320-8. Isotonie und Antitonie vererben sich beim Übergang von M zu M^{-1}.

320-8(Satz)

a) $\mathsf{id}^{-1} = \mathsf{id}$.

b) $\overbrace{M^{-1}}^{\textbf{ir}} = \overset{\textbf{ir}}{M}{}^{-1}$.

c) *"E ist M_isoton auf z" genau dann, wenn "E ist M^{-1}_isoton auf z".*

d) *"E ist M_antiton auf z" genau dann, wenn "E ist M^{-1}_antiton auf z".*

e) *"E streng M_isoton auf z" genau dann, wenn "E streng M^{-1}_isoton auf z".*

f) *"E streng M_antiton auf z" genau dann, wenn "E streng M^{-1}_antiton auf z".*

Beweis **320-8** a)

$$\mathsf{id}^{-1} \overset{\textbf{20-7(Def)}}{=} (\mathsf{id}_{\mathcal{U}})^{-1} \overset{\textbf{20-12}}{=} \mathsf{id}_{\mathcal{U}} \overset{\textbf{20-7(Def)}}{=} \mathsf{id}.$$

b)

$$\overbrace{M^{-1}}^{\textbf{ir}} \overset{\textbf{41-1(Def)}}{=} ((M^{-1})^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id} \overset{\textbf{a)}}{=} ((M^{-1})^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id}^{-1} \overset{\textbf{12-1}}{=} ((M^{-1})^{-1} \setminus \mathsf{id})^{-1}$$

$$\overset{\textbf{41-1(Def)}}{=} \overset{\textbf{ir}}{M}{}^{-1}.$$

Beweis **320-8** c) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich E ist M_isoton auf z.

1.1: Aus VS gleich "E ist M_isoton auf z"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)$.

2: Aus Thema1.2"$\ldots \alpha\_M^{-1}\_\beta \ldots$"
folgt via **30-81**: β_M_α.

3: Aus Thema1.2"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus Thema1.2"$\alpha \ldots \in z \ldots$",
aus 2"β_M_α",
aus Thema1.2"$\ldots (\beta, \delta) \in E$",
aus Thema1.2"$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in E$" und
aus VS gleich "E ist M_isoton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: δ_M_γ.

4: Aus 3"δ_M_γ"
folgt via **30-81**: $\gamma\_M^{-1}\_\delta$.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E))$
$\Rightarrow (\gamma\_M^{-1}\_\delta)$"

2: Aus 1.1"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E))$
$\Rightarrow (\gamma\_M^{-1}\_\delta)$"
folgt via **81-2**: E ist M^{-1}_isoton auf z.

Beweis **320-8** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich E ist M^{-1}_isoton auf z.

1.1: Aus VS gleich "E ist M^{-1}_isoton auf z"
folgt via **81-2**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

Thema1.2 $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)$.

2: Aus Thema1.2"$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt via **30-81**: $\beta\_M^{-1}\_\alpha$.

3: Aus Thema1.2"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus Thema1.2"$\alpha \ldots \in z \ldots$",
aus 2"$\beta\_M^{-1}\_\alpha$",
aus Thema1.2"$\ldots (\beta, \delta) \in E$",
aus Thema1.2"$(\ldots \alpha, \gamma) \ldots \in E$" und
aus VS gleich "E ist M^{-1}_isoton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: $\delta\_M^{-1}\_\gamma$.

4: Aus 3"$\delta\_M^{-1}\_\gamma$"
folgt via **30-81**: γ_M_δ.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

2: Aus 1.1"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **81-2**: E ist M_isoton auf z.

Beweis **320-8** d) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich E ist M_antiton auf z.

1.1: Aus VS gleich "E ist M_antiton auf z"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

Thema1.2 $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)$.

2: Aus Thema1.2"$\ldots \alpha\_M^{-1}\_\beta \ldots$"
folgt via **30-81**: β_M_α.

3: Aus Thema1.2"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus Thema1.2"$\alpha \ldots \in z \ldots$",
aus 2"β_M_α",
aus Thema1.2"$\ldots (\beta, \delta) \in E$",
aus Thema1.2"$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in E$" und
aus VS gleich "E ist M_antiton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: γ_M_δ.

4: Aus 3"γ_M_δ"
folgt via **30-81**: $\delta\_M^{-1}\_\gamma$.

Ergo Thema1.2:

A1 | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M^{-1}\_\gamma)$"

2: Aus 1.1"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M^{-1}\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M^{-1}\_\gamma)$"
folgt via **81-3**: E ist M^{-1}_antiton auf z.

<u>Beweis **320-8**</u> `d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich E ist M^{-1}_antiton auf z.

`1.1:` Aus `VS` gleich "E ist M^{-1}_antiton auf z"
folgt via **81-3**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, E$.

`Thema1.2` $(\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \alpha\_M\_\beta \ldots$"
folgt via **30-81**: $\beta\_M^{-1}\_\alpha$.

`3:` Aus `Thema1.2`"$\ldots \beta \in z \ldots$",
aus `Thema1.2`"$\alpha \ldots \in z \ldots$",
aus `2`"$\beta\_M^{-1}\_\alpha$",
aus `Thema1.2`"$\ldots (\beta, \delta) \in E$",
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \ldots \in E$" und
aus `VS` gleich "E ist M^{-1}_antiton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: $\gamma\_M^{-1}\_\delta$.

`4:` Aus `3`"$\gamma\_M^{-1}\_\delta$"
folgt via **30-81**: δ_M_γ.

Ergo `Thema1.2`:

`A1` | "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$z \subseteq \mathsf{dom}\, E$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_M\_\beta) \wedge ((\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \in E)) \Rightarrow (\delta\_M\_\gamma)$"
folgt via **81-3**: E ist M_antiton auf z.

<u>Beweis</u> **320-8** `e)`

`1.1:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$(E \text{ streng } M\text{\_isoton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}\text{\_isoton auf } z).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:

$$(E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}\text{\_isoton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1}\text{\_isoton auf } z).$$

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $$(E \text{ streng } M\text{\_isoton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1}\text{\_isoton auf } z).$$

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1} = \overbrace{M^{-1}}^{\mathbf{ir}}$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $$(E \text{ streng } M\text{\_isoton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overbrace{M^{-1}}^{\mathbf{ir}}\text{\_isoton auf } z).$$

`3.2:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$(E \text{ streng } M^{-1}\text{\_isoton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overbrace{M^{-1}}^{\mathbf{ir}}\text{\_isoton auf } z).$$

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $$(E \text{ streng } M\text{\_isoton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ streng } M^{-1}\text{\_isoton auf } z).$$

<u>Beweis **320-8** `f)`</u>

`1.1:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$(E \text{ streng } M\text{\_antiton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}\text{\_antiton auf } z).$$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:

$$(E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}\text{\_antiton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1}\text{\_antiton auf } z).$$

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $$(E \text{ streng } M\text{\_antiton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1}\text{\_antiton auf } z).$$

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $$\overset{\mathbf{ir}}{M}{}^{-1} = \overbrace{M^{-1}}^{\mathbf{ir}}.$$

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $$(E \text{ streng } M\text{\_antiton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overbrace{M^{-1}}^{\mathbf{ir}}\text{\_antiton auf } z).$$

`3.2:` Via **320-3(Def)** gilt:

$$(E \text{ streng } M^{-1}\text{\_antiton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ ist } \overbrace{M^{-1}}^{\mathbf{ir}}\text{\_antiton auf } z).$$

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $$(E \text{ streng } M\text{\_antiton auf } z) \Leftrightarrow (E \text{ streng } M^{-1}\text{\_antiton auf } z).$$

320-9. Für Funktionen ist strenge Isotonie griffig beschreibbar.

320-9(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) f *Funktion.*

... sind die Aussagen i), ii) *äquivalent:*

i) f *streng* M_*isoton auf* z.

ii) "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
und "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(\beta))$".

Beweis **320-9** $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ VS gleich f streng M_isoton auf z.

1: Aus VS gleich "f streng M_isoton auf z"
folgt via **320-3(Def)**: f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf z.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus 1 "f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf z"
folgt via **81-6**:

$$(z \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(\beta))).$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{i)}}$

VS gleich $(z \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(\beta)))$.

1: Aus →) "f Funktion",
aus VS gleich "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)) \Rightarrow (f(\alpha)\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(\beta))$"
folgt via **81-6**: f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf z.

2: Aus 1 "f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf z"
folgt via **320-3(Def)**: f streng M_isoton auf z.

□

320-10. Für Funktionen ist strenge Antitonie griffig beschreibbar.

320-10(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen i), ii) *äquivalent:*

i) f *streng* M*-antiton auf* z.

ii) "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
und "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta)) \Rightarrow (f(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-} f(\alpha))$".

Beweis **320-10** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich f streng M-antiton auf z.

1: Aus VS gleich "f streng M-antiton auf z"
folgt via **320-3(Def)**: f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ -antiton auf z.

2: Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus 1 "f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ -antiton auf z"
folgt via **81-7**:
$$(z \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta)) \Rightarrow (f(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-} f(\alpha))).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

VS gleich $(z \subseteq \mathsf{dom}\, f) \wedge (\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta)) \Rightarrow (f(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-} f(\alpha))).$

1: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus VS gleich "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta)) \Rightarrow (f(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-} f(\alpha))$"
folgt via **81-7**: f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ -antiton auf z.

2: Aus 1 "f ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ -antiton auf z"
folgt via **320-3(Def)**: f streng M-antiton auf z.

□

320-11. Für Funktionen vereinfacht sich **320-6**.

320-11(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *streng* M*-isoton auf* z.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$.

Dann folgt "f *ist* M*-isoton auf* z*".*

<u>Beweis **320-11**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in z) \wedge ((\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f)$.

`2.1:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1` "$\ldots (\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f$"
folgt via **18-18(Def)**: $\gamma = \delta$.

`2.2:` Aus →) "f Funktion" und
aus `Thema1.1` "$\ldots (\beta, \gamma) \ldots \in f$"
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\beta \in z \ldots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$"
folgt: $f(\beta)\_M\_f(\beta)$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $f(\beta) = \delta$.

`3.2:` Aus `2.3` und
aus `2.2`
folgt: $\gamma\_M\_f(\beta)$.

`4:` Aus `3.2` und
aus `3.1`
folgt: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in z) \wedge ((\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"

`1.2:` Aus →) "f streng M_isoton auf z" und
aus `A1` gleich "$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in z) \wedge ((\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$"
folgt via **320-6**: f ist M_isoton auf z.

□

320-12. Für Funktionen vereinfacht sich **320-7**.

320-12(Satz) *Es gelte:*

→) f *Funktion.*

→) f *streng* M_*antiton auf* z.

→) $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$.

Dann folgt "f ist M_*antiton auf* z*".*

<u>Beweis **320-12**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\beta \in z) \wedge ((\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f)$.

`2.1`: Aus →) “f Funktion” und
aus `Thema1.1` “$\ldots (\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f$”
folgt via **18-18(Def)**: $\gamma = \delta$.

`2.2`: Aus →) “f Funktion” und
aus `Thema1.1` “$\ldots (\beta, \gamma) \ldots \in f$”
folgt via **18-20**: $\gamma = f(\beta)$.

`2.3`: Aus `VS` gleich “$\beta \in z \ldots$” und
aus →) “$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$”
folgt: $f(\beta)\_M\_f(\beta)$.

`3.1`: Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $f(\beta) = \delta$.

`3.2`: Aus `2.3` und
aus `2.2`
folgt: $\gamma\_M\_f(\beta)$.

`4`: Aus `3.2` und
aus `3.1`
folgt: γ_M_δ.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in z) \wedge ((\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$”

`1.2`: Aus →) “f streng M_antiton auf z” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta, \gamma, \delta : ((\beta \in z) \wedge ((\beta, \gamma), (\beta, \delta) \in f)) \Rightarrow (\gamma\_M\_\delta)$”
folgt via **320-7**: f ist M_antiton auf z.

□

320-13. Ist M reflexiv in $f[z]$, f Funktion, so kann **320-11** weiter vereinfacht werden.

320-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ *f streng M_isoton auf z.*

$\rightarrow)$ *M reflexiv in $f[z]$.*

Dann folgt "f ist M_isoton auf z".

Beweis **320-13**

`Thema1.1` $\alpha \in z$.

2: Aus $\rightarrow)$ "f streng M_isoton auf z"
folgt via **320-9**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus `Thema1.1` "$\alpha \in z$" und
aus 2 "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(\alpha) \in f[z]$.

4: Aus $\rightarrow)$ "M reflexiv in $f[z]$" und
aus 3 "$f(\alpha) \in f[z]$"
folgt via **30-17(Def)**: $f(\alpha)\_M\_f(\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$"

1.2: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow)$ "f streng M_isoton auf z" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$"
folgt via **320-11**: f ist M_isoton auf z.

□

320-14. Ist M reflexiv in $f[z]$, f Funktion, so kann **320-12** weiter vereinfacht werden.

320-14(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ *f streng M_antiton auf z.*

$\rightarrow)$ *M reflexiv in $f[z]$.*

Dann folgt "f ist M_antiton auf z".

Beweis **320-14**

`Thema1.1` $\alpha \in z$.

`2:` Aus $\rightarrow)$"f streng M_antiton auf z"
folgt via **320-10**: $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`3:` Aus $\rightarrow)$"f Funktion",
aus `Thema1.1`"$\alpha \in z$" und
aus 2"$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(\alpha) \in f[z]$.

`4:` Aus $\rightarrow)$"M reflexiv in $f[z]$" und
aus 3"$f(\alpha) \in f[z]$"
folgt via **30-17(Def)**: $f(\alpha)\_M\_f(\alpha)$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$"

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"f Funktion",
aus $\rightarrow)$"f streng M_antiton auf z" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (f(\alpha)\_M\_f(\alpha))$"
folgt via **320-12**: f ist M_antiton auf z.

$\square$

320-15. Die Schlussfolgerung von **320-13** ist natürlich auch dann verfügbar, wenn M in u reflexiv ist und $f[z] \subseteq u$ gilt.

320-15(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ f *streng* M*_isoton auf* z.

$\rightarrow)$ M *reflexiv in* u.

$\rightarrow)$ $(f[z] \subseteq u) \vee (\mathsf{ran}\, f \subseteq u)$.

Dann folgt "f *ist* M*_isoton auf* z*".*

Beweis **320-15**

1: Nach →) gilt: $(f[z] \subseteq u) \vee (\mathsf{ran}\, f \subseteq u)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f[z] \subseteq u$.

2: Aus →) "M reflexiv in u" und
aus `1.1.Fall` "$f[z] \subseteq u$"
folgt via **30-20**: M reflexiv in $f[z]$.

3: Aus →) "f Funktion",
aus →) "f streng M_isoton auf z" und
aus 2 "M reflexiv in $f[z]$"
folgt via **320-13**: f ist M_isoton auf z.

`1.2.Fall` $\mathsf{ran}\, f \subseteq u$.

2: Via **8-10** gilt: $f[z] \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2 "$f[z] \subseteq \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1.2.Fall` "$\mathsf{ran}\, f \subseteq u$"
folgt via **0-6**: $f[z] \subseteq u$.

4: Aus →) "M reflexiv in u" und
aus 3 "$f[z] \subseteq u$"
folgt via **30-20**: M reflexiv in $f[z]$.

5: Aus →) "f Funktion",
aus →) "f streng M_isoton auf z" und
aus 4 "M reflexiv in $f[z]$"
folgt via **320-13**: f ist M_isoton auf z.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: f ist M_isoton auf z.

□

320-16. Die Schlussfolgerung von **320-14** ist natürlich auch dann verfügbar, wenn M in u reflexiv ist und $f[z] \subseteq u$ gilt.

320-16(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *streng* M*_antiton auf* z.

$\rightarrow$) M *reflexiv in* u.

$\rightarrow$) $(f[z] \subseteq u) \vee (\mathsf{ran}\, f \subseteq u)$.

Dann folgt "f *ist* M*_antiton auf* z*".*

<u>Beweis **320-16**</u>

1: Nach →) gilt: $(f[z] \subseteq u) \vee (\mathsf{ran}\, f \subseteq u)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $f[z] \subseteq u$.

2: Aus →) “M reflexiv in u” und
aus `1.1.Fall` “$f[z] \subseteq u$”
folgt via **30-20**: M reflexiv in $f[z]$.

3: Aus →) “f Funktion”,
aus →) “f streng M_antiton auf z” und
aus 2 “M reflexiv in $f[z]$”
folgt via **320-14**: f ist M_antiton auf z.

`1.2.Fall` $\mathsf{ran}\, f \subseteq u$.

2: Via **8-10** gilt: $f[z] \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2 “$f[z] \subseteq \mathsf{ran}\, f$” und
aus `.12.Fall` “$\mathsf{ran}\, f \subseteq u$”
folgt via **0-6**: $f[z] \subseteq u$.

4: Aus →) “M reflexiv in u” und
aus 3 “$f[z] \subseteq u$”
folgt via **30-20**: M reflexiv in $f[z]$.

5: Aus →) “f Funktion”,
aus →) “f streng M_antiton auf z” und
aus 4 “M reflexiv in $f[z]$”
folgt via **320-14**: f ist M_antiton auf z.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: f ist M_antiton auf z.

□

320-17. Interessanter Weise ist auf Ketten die strenge Isotonie/Antitonie näher an Injektivität als an Isotonie/Antitonie.

320-17(Satz)

a) *Aus "E streng M_isoton auf z" und "z ist M_Kette" folgt "E injektiv auf z".*

b) *Aus "E streng M_antiton auf z" und "z ist M_Kette" folgt "E injektiv auf z".*

Beweis **320-17** `a)` `VS` gleich $(E$ streng M_isoton auf $z) \wedge (z$ ist M_Kette$)$.

`Thema0` $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in E) \wedge (\alpha, \gamma \in z)$.

`1:` Aus `Thema0`"$\ldots \alpha, \gamma \in z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z$ ist M_Kette"
folgt via **41-8**: $(\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma) \vee (\alpha = \gamma) \vee (\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \alpha)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma$.

`2:` Aus `VS` gleich "E streng M_isoton auf $z \ldots$",
folgt via **320-3(Def)**: E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z.

`3:` Aus `Thema0`"$\ldots \alpha, \gamma \in z$",
aus `1.1.Fall`"$\alpha \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \gamma$",
aus `Thema0`"$(\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in E \ldots$" und
aus `2`"E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: $\beta \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta$.

`4:` Via **41-5** gilt: $\neg(\beta \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta)$.

`1.2.Fall` $\alpha = \gamma$.

...

...

<u>Beweis **320-17**</u> `a)` `VS` gleich $(E \text{ streng } M\text{\_isoton auf } z) \wedge (z \text{ ist } M\text{\_Kette})$.

...

`Thema0` $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in E) \wedge (\alpha, \gamma \in z)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \alpha$.

`2:` Aus `VS` gleich "E streng M_isoton auf $z \ldots$",
folgt via **320-3(Def)**: E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z.

`3:` Aus `Thema0`"$\ldots \gamma \in z$",
aus `Thema0`"$\ldots \alpha \ldots \in z$",
aus `1.3.Fall`"$\gamma \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \alpha$",
aus `Thema0`"$\ldots (\gamma, \beta) \in E$",
aus `Thema0`"$(\alpha, \beta) \ldots \in E \ldots$" und
aus `2`"E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: $\beta \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta$.

`4:` Via **41-5** gilt: $\neg(\beta \_ \overset{\mathbf{ir}}{M} \_ \beta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in E) \wedge (\alpha, \gamma \in z)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: E injektiv auf z.

<u>Beweis **320-17**</u> `b)` `VS` gleich $(E \text{ streng } M\_\text{antiton auf } z) \wedge (z \text{ ist } M\_\text{Kette})$.

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $((\alpha,\beta),(\gamma,\beta) \in E) \wedge (\alpha,\gamma \in z)$.

`1:` Aus `Thema0`"$\ldots \alpha,\gamma \in z$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z$ ist $M_$Kette"
folgt via **41-8**: $(\alpha\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_\gamma) \vee (\alpha = \gamma) \vee (\gamma\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_\alpha)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $\alpha\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_\gamma$.

`2:` Aus `VS` gleich "E streng $M_$antiton auf $z \ldots$"
folgt via **320-3(Def)**: E ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ $_$antiton auf z.

`3:` Aus `Thema0`"$\ldots \alpha,\gamma \in z$",
aus `1.1.Fall`"$\alpha\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_\gamma$",
aus `Thema0`"$(\alpha,\beta),(\gamma,\beta) \in E \ldots$" und
aus `2`"E ist $\overset{\textbf{ir}}{M}$ $_$antiton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: $\beta\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_\beta$.

`4:` Via **41-5** gilt: $\neg(\beta\_ \overset{\textbf{ir}}{M} \_\beta)$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $\alpha = \gamma$.

...

...

<u>Beweis **320-17**</u> `b) VS` gleich $(E \text{ streng } M\_\text{antiton auf } z) \wedge (z \text{ ist } M\_\text{Kette})$.

...

`Thema0` $((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in E) \wedge (\alpha, \gamma \in z)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$.

`2:` Aus `VS` gleich "E streng $M_$antiton auf $z\ldots$",
folgt via **320-3(Def)**: $E \text{ ist } \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\text{antiton auf } z$.

`3:` Aus `Thema0`"$\ldots \gamma \in z$",
aus `Thema0`"$\ldots \alpha \ldots \in z$",
aus `1.3.Fall`"$\gamma\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\alpha$",
aus `Thema0`"$\ldots (\gamma, \beta) \in E$",
aus `Thema0`"$(\alpha, \beta) \ldots \in E \ldots$" und
aus `2`"E ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}_$antiton auf z"
folgt via **81-1(Def)**: $\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta$.

`4:` Via **41-5** gilt: $\neg(\beta\_ \overset{\mathbf{ir}}{M}\_\beta)$.

`5:` $\alpha = \gamma$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\alpha = \gamma$.

Ergo `Thema0`: $\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta), (\gamma, \beta) \in E) \wedge (\alpha, \gamma \in z)) \Rightarrow (\alpha = \gamma)$.

Konsequenz via **299-1(Def)**: E injektiv auf z.

□

320-18. Unter all den Kombinationsmöglichkeiten der nun verfügbaren Resultate über strenge Isotonie und Injektivität scheint mir die Verbindung von **320-9** und **320-17** am weitestreichenden zu sein.

320-18(Satz) *Es gelte:*

→) *f Funktion.*

→) $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

→) *z ist M_Kette.*

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- \beta)) \Rightarrow (f(\alpha)_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- f(\beta))$.

Dann folgt "f injektiv auf z".

Beweis **320-18**

1: Aus →) "f Funktion",
aus →) "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- \beta)) \Rightarrow (f(\alpha)_- \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_- f(\beta))$"
folgt via **320-9**: f streng M_isoton auf z.

2: Aus 1 "f streng M_isoton auf z" und
aus →) "z ist M_Kette"
folgt via **320-17**: f injektiv auf z.

□

320-19. Unter all den Kombinationsmöglichkeiten der nun verfügbaren Resultate über strenge Antitonie und Injektivität scheint mir die Verbindung von **320-10** und **320-17** am weitestreichenden zu sein.

320-19(Satz) *Es gelte:*

→) f *Funktion.*

→) $z \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

→) z *ist* M_*Kette.*

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\beta)) \Rightarrow (f(\beta)_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}f(\alpha))$.

Dann folgt "f injektiv auf z".

Beweis **320-18**

1: Aus →) "f Funktion",
aus →) "$z \subseteq \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in z) \wedge (\alpha_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\beta)) \Rightarrow (f(\beta)_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}f(\alpha))$"
folgt via **320-10**: f streng M_antiton auf z.

2: Aus 1 "f streng M_antiton auf z" und
aus →) "z ist M_Kette"
folgt via **320-17**: f injektiv auf z.

□

Analysis: $|.|$.

Ersterstellung: 09/12/14 **Letzte Änderung: 11/12/14**

321-1. In erwarteter Weise betritt die Betragsfunktion die Essays.

321-1(Definition)

1) $|.| = \sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}$.

2) "$\mathfrak{C}$ **Betragsfunktion**" genau dann, wenn

$$\mathfrak{C} = |.|.$$

3) $|x| = |.|(x)$.

321-2. Es gibt nur eine Betragsfunktion und diese ist $|.|$.

<u>**321-2(Satz)**</u>

a) $|.|$ *Betragsfunktion.*

b) *Aus* "$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *Betragsfunktion" folgt* "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

<u>Beweis **321-2**</u> a)
Aus "$|.| = |.|$" folgt via **321-1(Def)**: $|.|$ Betragsfunktion.

b) VS gleich $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ Betragsfunktion.

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C} \ldots$ Betragsfunktion"
folgt via **321-1(Def)**: $\mathfrak{C} = |.|$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathfrak{D}$ Betragsfunktion"
folgt via **321-1(Def)**: $\mathfrak{D} = |.|$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

□

321-3. Aus $x \in \mathbb{T}$ folgt $x \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

<u>321-3(Satz)</u>

Aus "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot x, x \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$".

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **321-3**</u> `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1`: Aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **317-4**"$\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$"
folgt: $\mathbb{T} \subseteq \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$.

`2`: Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion"
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `1`"$\mathbb{T} \subseteq \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$"
folgt via **18-27**: $(\uparrow 2)(x) \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

`3`: Aus `2`
folgt: $x \uparrow 2 \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

`4`: Aus `3`"$x \uparrow 2 \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$" und
aus **317-57**"$(\uparrow 2)[\mathbb{T}] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt: $\boxed{x \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]}$

`5`: Via **317-4** gilt: $x \cdot x = x \uparrow 2$.

`6`: Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\boxed{x \cdot x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]}$

$\square$

321-4. Es gilt $\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.
Die Beweis-Reihenfolge ist `bcafgdehi)`.

<u>321-4(Satz)</u>

a) $\mathsf{ab2}$ *Relation.*

b) $\mathsf{ab2}$ *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$.

d) $\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

e) $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

f) $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2$.

g) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$\mathsf{ab2}(x) = x \cdot x$" *und* "$\mathsf{ab2}(x) = x \uparrow 2$".

h) *Aus* "x *Zahl*" *folgt* "$\mathsf{ab2}(x) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$".

i) $\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

<u>`REIM.RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **321-4**</u> `abc)`

`1.b):` Aus **128-13**“$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ab2}$ Funktion.

`1.c):` Aus **128-13**“$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$.

`2.a):` Aus `1.b)`“$\mathsf{ab2}$ Funktion”
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{ab2}$ Relation.

`f)`

$$\mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2.$$

`g)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{Im}x = 0$”
folgt via **130-3**: $\boxed{\mathsf{ab2}(x) = x \cdot x}$

`3:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\boxed{\mathsf{ab2}(x) = x \uparrow 2}$

<u>Beweis</u> **321-4** `d)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$" und
aus **128-13** "$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$"
folgt via **312-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha = \mathsf{ab2}(\Omega))$.

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: Ω Zahl.

4: Aus 3 "Ω Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}\Omega, \mathsf{Im}\Omega \in \mathbb{T}$.

5.1: Aus 4 "$\mathsf{Re}\Omega \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via **321-3**: $(\mathsf{Re}\Omega) \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

5.2: Aus 4 "$\ldots \mathsf{Im}\Omega \in \mathbb{T}$"
folgt via **321-3**: $(\mathsf{Im}\Omega) \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

6: Aus 5.1 "$(\mathsf{Re}\Omega) \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus 5.2 "$(\mathsf{Im}x) \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-13**:
$(\mathsf{Re}\Omega) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}\Omega) \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

7: Via des bereits bewiesenen `f)` gilt:
$\mathsf{ab2}(\Omega) = (\mathsf{Re}\Omega) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}\Omega) \uparrow 2$.

8: Aus 7 und
aus 6
folgt: $\mathsf{ab2}(\Omega) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

9: Aus 2 "$\ldots \alpha = \mathsf{ab2}(\Omega)$" und
aus 8
folgt: $\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})) \Rightarrow (\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"

...

Beweis **321-4** `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-5**: $\sqrt{\alpha} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-6**: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = \alpha$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\sqrt{\alpha} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2.1` "$\sqrt{\alpha} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **318-3** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{A}$.

`3.3:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$.

`3.4:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{ab2}$ Funktion.

`4.1:` Aus `3.1` "$\sqrt{\alpha} \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`:
$\mathsf{ab2}(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $\sqrt{\alpha} \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2})$.

`5.1:` Aus `4.1` und
aus `2.2`
folgt: $\alpha = \mathsf{ab2}(\sqrt{\alpha})$.

`5.2:` Aus `4.2` "$\sqrt{\alpha} \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2})$" und
aus `3.4` "$\mathsf{ab2}$ Funktion"
folgt via **18-22**: $\mathsf{ab2}(\sqrt{\alpha}) \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$.

...

<u>Beweis **321-4**</u> `d)` ...

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2}\,\big|\ \text{“}\{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})\text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$” und
aus `A2` gleich “$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \subseteq \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{ab2}$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{ab2}$ Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$”
folgt via **21-2**: $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`h)` `VS` gleich x Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich “x Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2}) = \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $x \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2})$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathsf{ab2}$ Funktion.

`3.1:` Aus `2.2`“$\mathsf{ab2}$ Funktion” und
aus `2.1`“$x \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{ab2})$”
folgt via **18-22**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$.

`3.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $\mathsf{ab2}(x) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`i)`
Aus **318-5**“$\sqrt{\cdot} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$ bijektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $\sqrt{\cdot} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

□

321-5. Der hier betrachtete Spezialfall von **14-6** wird bald mit Erfolg eingesetzt.

321-5(Satz)

a) *Aus* "$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{ran}\, y$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$".

b) *Aus* "$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{ran}\, y$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(x \circ y) = \mathsf{ran}\, x$".

Beweis **321-5** a) VS gleich $\mathsf{dom}\, x = \mathsf{ran}\, y$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{ran}\, y$" folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus 1 "$\mathsf{ran}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, x$" folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

b) VS gleich $\mathsf{dom}\, x = \mathsf{ran}\, y$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x = \mathsf{ran}\, y$" folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, y$.

2: Aus 1 "$\mathsf{dom}\, x \subseteq \mathsf{ran}\, y$" folgt via **14-6**: $\mathsf{ran}\,(x \circ y) = \mathsf{ran}\, y$.

□

321-6. Die Betragsfunktion ist in der Tat eine Funktion. Es gilt stets $|x| = \sqrt{(\mathsf{Re}x)\uparrow 2 + (\mathsf{Im}x)\uparrow 2}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `baecdfg`).

321-6(Satz)

a) $|.|$ *Relation.*

b) $|.|$ *Funktion.*

c) $\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$.

d) $\mathsf{ran}\,|.| = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

e) $|.| : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

f) $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

g) $|x| = \sqrt{(\mathsf{Re}x)\uparrow 2 + (\mathsf{Im}x)\uparrow 2}$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **321-6** `ab)`

1: Aus **318-5**“$\sqrt{.}$ Funktion” und
aus **321-4**“$\mathsf{ab2}$ Funktion”
folgt via **18-46**: $\sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}$ Funktion.

2.b): Aus 1 und
aus **321-1(Def)**“$|.| = \sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}$”
folgt: $|.|$ Funktion.

3.a): Aus 2.b)“$|.|$ Funktion”
folgt via **18-18(Def)**: $|.|$ Relation.

`ce)`

1: Aus **321-4**“$\sqrt{.} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus **321-4**“$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **21-10**: $\sqrt{.} \circ \mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

2.e): Aus 1 und
aus **321-1(Def)**“$|.| = \sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}$”
folgt: $|.| : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

3.c): Aus 2.e)“$|.| : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$.

<u>Beweis **321-6**</u> `d)`

`1:` Aus **318-5** “$\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$” und
aus **321-4** “$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}).$

`2:` Aus 1 “$\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2})$”
folgt via **321-5**: $\mathsf{ran}\,(\sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}) = \mathsf{ran}\,\sqrt{.}.$

`3:` Aus 2 und
aus **318-5** “$\mathsf{ran}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$”
folgt: $\mathsf{ran}\,(\sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty].$

`4:` Aus 3 und
aus **321-1(Def)** “$|.| = \sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}$”
folgt: $\mathsf{ran}\,|.| = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty].$

`fg)`

`1:` Aus **318-5** “$\sqrt{.}$ Funktion” und
aus **321-4** “$\mathsf{ab2}$ Funktion”
folgt via **18-46**: $(\sqrt{.} \circ \mathsf{ab2})(x) = \sqrt{.}(\mathsf{ab2}(x)).$

`2:` Aus 1
folgt: $(\sqrt{.} \circ \mathsf{ab2})(x) = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}.$

`3.f):` Aus 2 und
aus **321-1(Def)** “$|.| = \sqrt{.} \circ \mathsf{ab2}$”
folgt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}.$

`4:` Via **321-4** gilt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2.$

`5.g):` Aus `3.f)` und
aus 4
folgt: $|x| = \sqrt{(\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2}.$

□

321-7. Ist f eine Funktion, so gilt $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$ oder $f(x) = \mathcal{U}$.

321-7(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$(f(x) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(x) = \mathcal{U})$".

Beweis **321-7** `VS` gleich f Funktion.

1: Es gilt: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \vee (x \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathsf{dom}\, f$.

Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `1.1.Fall` "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathsf{dom}\, f$.

Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(x) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(f(x) \in \mathsf{ran}\, f) \vee (f(x) = \mathcal{U})$.

□

321-8. Es gilt $|x| = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$ und $|-x| = |x|$.

321-8(Satz)

a) $(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U})$.

b) $|x| = \sqrt{|x| \cdot |x|}$.

c) $|x| = \sqrt{|x| \uparrow 2}$.

d) $|x| = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$.

e) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$|x| = \sqrt{x \cdot x}$" *und* "$|x| = \sqrt{x \uparrow 2}$".

f) $|-x| = |x|$.

g) "$|x| = \mathcal{U}$" *genau dann, wenn* "$x \notin \mathbb{A}$".

h) "$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" *genau dann, wenn* "$x$ *Zahl*".

i) $|\mathcal{U}| = \mathcal{U}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **321-8** a)

1: Aus **321-6**"$|.|$ Funktion"
folgt via **321-7**: $(|x| \in \mathsf{ran}\,|.|) \vee (|x| = \mathcal{U})$.

2: Aus 1 und
aus **321-6**"$\mathsf{ran}\,|,| = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt: $(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U})$.

<u>Beweis **321-8**</u> `b)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Aus `1.1.Fall` “$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”

folgt via **318-6**: $|x| = \sqrt{|x| \cdot |x|}$.

`1.2.Fall` $|x| = \mathcal{U}$.

$$|x| \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{17-7}}{=} \sqrt{\cdot}(\mathcal{U}) = \sqrt{\mathcal{U}} \stackrel{\textbf{96-19}}{=} \sqrt{\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}} \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \sqrt{|x| \cdot |x|}.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $|x| = \sqrt{|x| \cdot |x|}$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $|x| = \sqrt{|x| \cdot |x|}$.

`2:` Via **317-4** gilt: $|x| \cdot |x| = |x| \uparrow 2$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $|x| = \sqrt{|x| \uparrow 2}$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Aus `1.1.Fall` “$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”

folgt via **318-6**: $|x| = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$.

`1.2.Fall` $|x| = \mathcal{U}$.

$$|x| \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U} \stackrel{\textbf{17-7}}{=} \sqrt{\cdot}(\mathcal{U}) \cdot \mathcal{U} \stackrel{\textbf{17-7}}{=} \sqrt{\cdot}(\mathcal{U}) \cdot \sqrt{\cdot}(\mathcal{U}) = \sqrt{\mathcal{U}} \cdot \sqrt{\mathcal{U}}$$
$$\stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}.$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $|x| = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$.

<u>Beweis</u> **321-8** `e)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **321-4**: $\mathsf{ab2}(x) = x \cdot x$.

`2:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1`
folgt: $\boxed{|x| = \sqrt{x \cdot x}}$

`4:` Via **317-4** gilt: $x \cdot x = x \uparrow 2$.

`5:` Aus `4` und
aus `3`
folgt: $\boxed{|x| = \sqrt{x \uparrow 2}}$

`f)`

$$|-x| \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(-x)} \stackrel{\mathbf{110-9}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} |x|.$$

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $|x| = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$|x| = \mathcal{U}$"
folgt via **17-4**: $x \notin \mathsf{dom}\,|.|$.

`2:` Aus `1` und
aus **321-6**"$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

`g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \notin \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{A}$" und
aus **321-6**"$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,|.|$.

`2:` Aus `1`"$x \notin \mathsf{dom}\,|.|$"
folgt via **17-4**: $|x| = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **321-8**</u> `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

1: Aus `VS` gleich "$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **ElementAxiom**: $|x|$ Menge.

2: Aus 1"$|x|$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\,|.|$.

3: Aus 2 und
aus **321-6**"$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$"
folgt: $x \in \mathbb{A}$.

4: Aus 3"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x Zahl.

1: Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

2: Aus 1"$x \in \mathbb{A}$" und
aus **321-6**"$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\,|.|$.

3: Aus **321-6**"$|.|$ Funktion" und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\,|.|$"
folgt via **18-22**: $|x| \in \mathsf{ran}\,|.|$.

4: Aus 3"$|x| \in \mathsf{ran}\,|.|$" und
aus **321-6**"$\mathsf{ran}\,|.| = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt: $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`i)`

1: Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

2: Aus 1"$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $|\mathcal{U}| = \mathcal{U}$.

$\square$

321-9. Aus $\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$ folgt $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$. Es gilt $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

321-9(Satz)

a) *Aus* "$\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$" *folgt* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" *und* "$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$" *und* "$x = (\sqrt{x}) \uparrow 2$" *und* "$x = \sqrt{x \cdot x}$" *und* "$x = \sqrt{x \uparrow 2}$".

b) *Aus* "$\sqrt{x}$ *Menge*" *folgt* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" *und* "$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$" *und* "$x = (\sqrt{x}) \uparrow 2$" *und* "$x = \sqrt{x \cdot x}$" *und* "$x = \sqrt{x \uparrow 2}$".

c) *Aus* "$\sqrt{x} \in y$" *folgt* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" *und* "$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$" *und* "$x = (\sqrt{x}) \uparrow 2$" *und* "$x = \sqrt{x \cdot x}$" *und* "$x = \sqrt{x \uparrow 2}$".

d) "$\sqrt{x} = 0$" *genau dann, wenn* "$x = 0$".

e) $|0| = 0$.

f) "$|x| = 0$" *genau dann, wenn* "$x = 0$".

RECH-**Notation**.

Beweis **321-9** a) VS gleich $\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\,(\sqrt{\cdot})$.

2: Aus 1 und
aus **318-5** "$\mathsf{dom}\,(\sqrt{\cdot}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt: $\boxed{x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]}$

3: Aus 2 "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **318-6**:

$$\boxed{(x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) \wedge (x = (\sqrt{x}) \uparrow 2) \wedge (x = \sqrt{x \cdot x}) \wedge (x = \sqrt{x \uparrow 2})}$$

<u>Beweis **321-9**</u> `b)` `VS` gleich $\sqrt{x}$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\sqrt{x}$ Menge"
folgt via **0-17**: $\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$
$\wedge(x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) \wedge (x = (\sqrt{x}) \uparrow 2) \wedge (x = \sqrt{x \cdot x}) \wedge (x = \sqrt{x \uparrow 2})$.

`c)` `VS` gleich $\sqrt{x} \in y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\sqrt{x} \in y$"
folgt via **94-1**: $\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$
$\wedge(x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) \wedge (x = (\sqrt{x}) \uparrow 2) \wedge (x = \sqrt{x \cdot x}) \wedge (x = \sqrt{x \uparrow 2})$.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\sqrt{x} = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\sqrt{x} = 0$" und
aus **0-18**"$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt: $\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\sqrt{x} \neq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`3:` $x \stackrel{2}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\cdot\mathbf{schola}}{=} 0$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x = 0$.

$\sqrt{x} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \sqrt{0} \stackrel{\mathbf{318-7}}{=} 0$.

`e)`

`1:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{T}$" folgt via **321-8**: $|0| = \sqrt{0 \cdot 0}$.

`2:` $|0| \stackrel{1}{=} \sqrt{0 \cdot 0} \stackrel{\cdot\mathbf{schola}}{=} \sqrt{0} \stackrel{\mathbf{318-7}}{=} 0$.

<u>Beweis</u> **321-9** `f)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $|x| = 0.$

`1:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}.$

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = 0.$

`3:` Aus `2`“ $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = 0$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ab2}(x) = 0.$

`4:` Aus `3`“ $\mathsf{ab2}(x) = 0$ ”
folgt via **128-2**: $x = 0.$

`f)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x = 0.$

$$|x| \stackrel{\texttt{VS}}{=} |0| \stackrel{\texttt{e)}}{=} 0.$$

□

321-10. Gelegentlich gilt $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

321-10(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`ii)` $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-10** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`1:` Es gilt: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \neq \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und aus `VS` folgt: $\mathcal{U} \neq \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`3:` Aus 2"$\mathcal{U} \neq \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$" folgt via **96-15**: $\sqrt{x}, \sqrt{x}$ Zahl.

`4:` Aus 3"$\ldots \sqrt{x}$ Zahl" folgt via **95-6**: $\sqrt{x}$ Menge.

`5:` Aus 4"$\sqrt{x}$ Menge" folgt via **321-9**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

Beweis **321-10** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $x = \mathcal{U}$.

1: Via **17-7** gilt: $\sqrt{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$.

2: $x \overset{\texttt{0.1.Fall}}{=} \mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U} \overset{1}{=} \sqrt{\mathcal{U}} \cdot \sqrt{\mathcal{U}} \overset{\texttt{0.1.Fall}}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-6**: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

□

321-11. Es schadet nicht, sich zwischendurch ein wenig mit $\leq$ _Intervallen zu befassen.

321-11(Satz)

a) *Aus* "$x \in [a|b]$" *folgt* "$x, a, b \in \mathbb{S}$".

b) *Aus* "$x \in]a|b[$" *folgt* "$x, a, b \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$x \in]a|b]$" *folgt* "$x, a, b \in \mathbb{S}$".

d) *Aus* "$x \in [a|b[$" *folgt* "$x, a, b \in \mathbb{S}$".

Beweis **321-11**

$\leq$.-Notation

...

<u>Beweis **321-11**</u> `a)` `VS` gleich $x \in [a|b]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in [a|b]$”
folgt via **142-3**: $a \leq x \leq b$.

`2.1:` Aus `1`“$a \leq x \ldots$”
folgt via **107-3**: $\boxed{a, x \in \mathbb{S}}$

`2.2:` Aus `1`“$\ldots x \leq b$”
folgt via **107-3**: $\boxed{b \in \mathbb{S}}$

`b)` `VS` gleich $x \in]a|b[$.

`1:` Via **142-5** gilt: $]a|b[\subseteq [a|b]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in]a|b[$” und
aus `1`“$]a|b[\subseteq [a|b]$”
folgt via **0-4**: $x \in [a|b]$.

`3:` Aus `2`“$x \in [a|b]$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x, a, b \in \mathbb{S}$.

`c)` `VS` gleich $x \in]a|b]$.

`1:` Via **142-5** gilt: $]a|b] \subseteq [a|b]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in]a|b]$” und
aus `1`“$]a|b[\subseteq [a|b]$”
folgt via **0-4**: $x \in [a|b]$.

`3:` Aus `2`“$x \in [a|b]$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x, a, b \in \mathbb{S}$.

`d)` `VS` gleich $x \in [a|b[$.

`1:` Via **142-5** gilt: $[a|b[\subseteq [a|b]$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in [a|b[$” und
aus `1`“$]a|b[\subseteq [a|b]$”
folgt via **0-4**: $x \in [a|b]$.

`3:` Aus `2`“$x \in [a|b]$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x, a, b \in \mathbb{S}$.

$\square$

321-12. Mit Hilfe von **321-11** kann das Verhalten von $\leq$ -Intervallen bei Wechsel des Vorzeichens gut dargestellt werden.

321-12(Satz)

a) *"$x \in [a|b]$" genau dann, wenn "$-x \in [-b|-a]$".*

b) *"$-x \in [a|b]$" genau dann, wenn "$x \in [-b|-a]$".*

c) *"$-(-x) \in [a|b]$" genau dann, wenn "$x \in [a|b]$".*

d) *"$x \in]a|b[$" genau dann, wenn "$-x \in]-b|-a[$".*

e) *"$-x \in]a|b[$" genau dann, wenn "$x \in]-b|-a[$".*

f) *"$-(-x) \in]a|b[$" genau dann, wenn "$x \in]a|b[$".*

g) *"$x \in]a|b]$" genau dann, wenn "$-x \in [-b|-a[$".*

h) *"$-x \in]a|b]$" genau dann, wenn "$x \in [-b|-a[$".*

i) *"$-(-x) \in]a|b]$" genau dann, wenn "$x \in]a|b]$".*

j) *"$x \in [a|b[$" genau dann, wenn "$-x \in]-b|-a]$".*

k) *"$-x \in [a|b[$" genau dann, wenn "$x \in]-b|-a]$".*

l) *"$-(-x) \in [a|b[$" genau dann, wenn "$x \in [a|b[$".*

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **321-12**</u>

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

---

a) $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \in [a|b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in [a|b]$"
folgt via **142-3**: $a \leq x \leq b$.

`2.1:` Aus `1`"$a \leq x \ldots$"
folgt via **109-15**: $-x \leq -a$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x \leq b$"
folgt via **109-15**: $-b \leq -x$.

`3:` Aus `2.2`"$-b \leq -x$" und
aus `2.1`"$-x \leq -a$"
folgt via **142-3**: $-x \in [-b|-a]$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-x \in [-b|-a]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x \in [-b|-a]$"
folgt via **142-3**: $-b \leq -x \leq -a$.

`2.1:` Aus `1`"$-b \leq -x \ldots$"
folgt via **109-15**: $x \leq b$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots -x \leq -a$"
folgt via **109-15**: $a \leq x$.

`3:` Aus `2.2`"$a \leq x$" und
aus `2.1`"$x \leq b$"
folgt via **142-3**: $x \in [a|b]$.

Beweis **321-12** `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $-x \in [a|b]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-x \in [a|b]$"
folgt via **321-11**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-x \in [a|b]$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-(-x) \in [-b|-a]$.

`2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2`
folgt: $x \in [-b|-a]$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x \in [-b|-a]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in [-b|-a]$"
folgt via **321-11**: $-b, -a \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in [-b|-a]$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-x \in [-(-a)|-(-b)]$.

`2:` Aus `1.1`"$-b, -a \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $b, a \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$b, a \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: b, a Zahl.

`4.1:` Aus `3`"$b \ldots$ Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-b) = b$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots a$ Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-a) = a$.

`5:` Aus `1.2` und
aus `4.1`
folgt: $-x \in [-(-a)|b]$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.2`
folgt: $-x \in [a|b]$.

<u>Beweis **321-12**</u> `c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-(-x) \in [a|b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-x) \in [a|b]$"
folgt via **321-11**: $-(-x) \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-(-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS`
folgt: $x \in [a|b]$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in [a|b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in [a|b]$"
folgt via **321-11**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2` "x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $-(-x) \in [a|b]$.

<u>Beweis **321-12**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \in \,]a|b[.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]a|b[$"
folgt via **142-3**: $a < x < b.$

`2.1:` Aus `1`"$a < x \ldots$"
folgt via **109-14**: $-x < -a.$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x < b$"
folgt via **109-14**: $-b < -x.$

`3:` Aus `2.2`"$-b < -x$" und
aus `2.1`"$-x < -a$"
folgt via **142-3**: $-x \in \,]-b|-a[.$

`d)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x \in \,]-b|-a[.$

`1:` Aus `VS` gleich "$-x \in \,]-b|-a[$"
folgt via **142-3**: $-b < -x < -a.$

`2.1:` Aus `1`"$-b < -x \ldots$"
folgt via **109-14**: $x < b.$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots -x < -a$"
folgt via **109-14**: $a < x.$

`3:` Aus `2.2`"$a < x$" und
aus `2.1`"$x < b$"
folgt via **142-3**: $x \in \,]a|b[.$

<u>Beweis</u> **321-12** `e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-x \in \,]a|b[$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-x \in \,]a|b[$"
folgt via **321-11**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-x \in \,]a|b[$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $-(-x) \in \,]-b|-a[$.

`2:` Aus `1.1`"$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2`
folgt: $x \in \,]-b|-a[$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in \,]-b|-a[$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]-b|-a[$"
folgt via **321-11**: $-b, -a \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]-b|-a[$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $-x \in \,]-(-a)|-(-b)[$.

`2:` Aus `1.1`"$-b, -a \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $b, a \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$b, a \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: b, a Zahl.

`4.1:` Aus `3`"$b \ldots$ Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-b) = b$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots a$ Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-a) = a$.

`5:` Aus `1.2` und
aus `4.1`
folgt: $-x \in \,]-(-a)|b[$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.2`
folgt: $-x \in \,]a|b[$.

<u>Beweis **321-12**</u> `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-(-x) \in \,]a|b[.$

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-x) \in \,]a|b[$"
folgt via **321-11**: $-(-x) \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1`"$-(-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}.$

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x.$

`5:` Aus `4` und
aus `VS`
folgt: $x \in \,]a|b[.$

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in \,]a|b[.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]a|b[$"
folgt via **321-11**: $x \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x.$

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $-(-x) \in \,]a|b[.$

<u>Beweis</u> **321-12** g) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $x \in]a|b]$.

1: Aus VS gleich "$x \in]a|b]$"
folgt via **142-3**: $a < x \le b$.

2.1: Aus 1"$a < x \ldots$"
folgt via **109-14**: $-x < -a$.

2.2: Aus 1"$\ldots x \le b$"
folgt via **109-15**: $-b \le -x$.

3: Aus 2.2"$-b \le -x$" und
aus 2.1"$-x < -a$"
folgt via **142-3**: $-x \in [-b|-a[$.

g) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $-x \in [-b|-a[$.

1: Aus VS gleich "$-x \in [-b|-a[$"
folgt via **142-3**: $-b \le -x < -a$.

2.1: Aus 1"$-b \le -x \ldots$"
folgt via **109-15**: $x \le b$.

2.2: Aus 1"$\ldots -x < -a$"
folgt via **109-14**: $a < x$.

3: Aus 2.2"$a < x$" und
aus 2.1"$x \le b$"
folgt via **142-3**: $x \in]a|b]$.

<u>Beweis **321-12**</u> `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-x \in \,]a|b]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-x \in \,]a|b]$”
folgt via **321-11**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$-x \in \,]a|b]$”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $-(-x) \in [-b|-a[$.

`2:` Aus `1.1`“$-x \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`“x Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2`
folgt: $x \in [-b|-a[$.

<u>Beweis **321-12**</u> `h)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x \in [-b|-a[$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in [-b|-a[$”
folgt via **321-11**: $-b, -a \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \in [-b|-a[$”
folgt via **142-3**: $-b \le x < -a$.

`2.1:` Aus `1.2`“$-b \le x \ldots$”
folgt via **109-15**: $-x \le -(-b)$.

`2.2:` Aus `1.2`“$\ldots x < -a$”
folgt via **109-14**: $-(-a) < -x$.

`2.3:` Aus `1.1`“$-b, -a \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $b, a \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.2`“$-(-a) < -x$” und
aus `2.1`“$-x \le -(-b)$”
folgt via **142-3**: $-x \in]-(-a)|-(-b)]$.

`3.2:` Aus `2.3`“$b, a \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: b, a Zahl.

`4.1:` Aus `3.2`“$b \ldots$ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-b) = b$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\ldots a$ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-a) = a$.

`5:` Aus `3.1` und
aus `4.1`
folgt: $-x \in]-(-a)|b]$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.2`
folgt: $-x \in]a|b]$.

<u>Beweis **321-12**</u> `i)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $-(-x) \in \,]a|b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-(-x) \in \,]a|b]$"
folgt via **321-11**: $-(-x) \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$-(-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS`
folgt: $x \in \,]a|b]$.

`i)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x \in \,]a|b]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \,]a|b]$"
folgt via **321-11**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $-(-x) \in \,]a|b]$.

<u>Beweis</u> **321-12** `j)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \in [a|b[$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in [a|b[$"
folgt via **142-3**: $a \le x < b$.

`2.1:` Aus `1`"$a \le x \ldots$"
folgt via **109-15**: $-x \le -a$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x < b$"
folgt via **109-14**: $-b < -x$.

`3:` Aus `2.2`"$-b < -x$" und
aus `2.1`"$-x \le -a$"
folgt via **142-3**: $-x \in]-b|-a]$.

`j)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-x \in]-b|-a]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-x \in]-b|-a]$"
folgt via **142-3**: $-b < -x \le -a$.

`2.1:` Aus `1`"$-b < -x \ldots$"
folgt via **109-14**: $x < b$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots -x \le -a$"
folgt via **109-15**: $a \le x$.

`3:` Aus `2.2`"$a \le x$" und
aus `2.1`"$x < b$"
folgt via **142-3**: $x \in [a|b[$.

<u>Beweis **321-12**</u> `k)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-x \in [a|b[$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$-x \in [a|b[$”
folgt via **321-11**: $-x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$-x \in [a|b[$”
folgt via des bereits bewiesenen `j)`: $-(-x) \in]-b|-a]$.

`2:` Aus `1.1`“$-x \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`“x Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2`
folgt: $x \in]-b|-a]$.

`k)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in]-b|-a]$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \in]-b|-a]$”
folgt via **321-11**: $-b, -a \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \in]-b|-a]$”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $-x \in [-(-a)|-(-b)[$.

`2:` Aus `1.1`“$-b, -a \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $b, a \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$b, a \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: b, a Zahl.

`4.1:` Aus `3`“$b \ldots$ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-b) = b$.

`4.2:` Aus `3`“$\ldots a$ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-a) = a$.

`5:` Aus `1.2` und
aus `4.1`
folgt: $-x \in [-(-a)|b[$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.2`
folgt: $-x \in [a|b[$.

<u>Beweis **321-12**</u> `1)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $-(-x) \in [a|b[$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-(-x) \in [a|b[$”
folgt via **321-11**: $-(-x) \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$-(-x) \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`“x Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`5:` Aus `4` und
aus `VS`
folgt: $x \in [a|b[$.

`1)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in [a|b[$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in [a|b[$”
folgt via **321-11**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`“x Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $-(-x) \in [a|b[$.

$\square$

321-13. Die Aussage $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ trifft unter anderem genau dann zu, wenn $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

321-13(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`ii)` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`iii)` $(x \le 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`iv)` $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`v)` $(x = -\infty) \vee (-\infty < x < 0) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\le$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-13** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1:` Aus `VS` gleich “$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **317-8**: $(0 \le -x) \vee (-x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \le -x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$0 \le -x$”
folgt via **109-16**: $x \le 0$.

`3:` Aus 2“$x \le 0$”
folgt via **142-3**: $x \in [-\infty|0]$.

`4:` Aus 3“$x \in [-\infty|0]$”
folgt via **2-2**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`1.2.Fall` $-x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$-x = \mathsf{nan}$”
folgt via **100-13**: $x = \mathsf{nan}$.

`3:` aus 2“$x = \mathsf{nan}$” und
aus **95-10**“$\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\}$”
folgt: $x \in \{\mathsf{nan}\}$.

`4:` Aus 3“$x \in \{\mathsf{nan}\}$”
folgt via **2-2**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

<u>Beweis **321-13**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$"
folgt via **94-8**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x \in [-\infty|0])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`1.2.Fall` $x \in [-\infty|0]$.
Aus `1.2.Fall` "$x \in [-\infty|0]$"
folgt via **142-3**: $x \leq 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \leq 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(x \leq 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x \leq 0$.
Aus `0.1.Fall` "$x \leq 0$"
folgt via **41-5**: $(x < 0) \vee (x = 0)$.

`0.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Beweis **321-13** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x < 0$.

`1:` Aus `0.1.Fall`“$x < 0$”
folgt via **142-3**: $x \in [\,-\infty|0\,[$.

`2:` Aus `1`“$x \in [\,-\infty|0\,[$”
folgt via **142-3**: $-\infty \le x < 0$.

`3:` Aus `2`“$-\infty \le x \ldots$”
folgt via **41-5**: $(-\infty = x) \vee (-\infty < x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x = -\infty) \vee (-\infty < x)$.

`5:` Aus `3` und
aus `0.1.Fall`“$x < 0$”
folgt: $(x = -\infty) \vee (-\infty < x < 0)$.

`0.2.Fall` $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = -\infty) \vee (-\infty < x < 0) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Beweis **321-13** $\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $(x = -\infty) \vee (-\infty < x < 0) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x = -\infty$.

1: Aus `0.1.Fall`“$x = -\infty$” folgt via **100-13**: $-x = +\infty$.

2: Aus `1`“$-x = +\infty$” folgt via **317-8**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`0.2.Fall` $-\infty < x < 0$.

1: Aus `0.2.Fall`“$\ldots x < 0$” folgt via **109-16**: $0 < -x$.

2: Aus `1`“$0 < -x$” folgt via **317-8**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`0.3.Fall` $x = 0$.

1: Aus `0.3.Fall`“$x = 0$” folgt via **100-13**: $-x = 0$.

2: Aus `1`“$-x = 0$” folgt via **317-8**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`0.4.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

1: Aus `0.4.Fall`“$x = \mathsf{nan}$” folgt via **100-13**: $-x = \mathsf{nan}$.

2: Aus `1`“$-x = \mathsf{nan}$” folgt via **317-8**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

□

321-14. Die Gleichung $-x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ tritt innerhalb der Zahlen eher selten auf, ist aber außerhalb der Zahlen immer anzutreffen.

321-14(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`ii)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **321-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $$-x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}.$$

1: Via **95-6** gilt: $$(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ x Zahl.

2: Aus 1.1.Fall“x Zahl”
folgt via **96-11**: $-x$ Zahl.

3: Aus 2 und
aus VS
folgt: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ Zahl.

4: Aus 3“$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ Zahl”
folgt via **96-15**: $\sqrt{x}, \sqrt{x}$ Zahl.

5: Aus 4“$\ldots \sqrt{x}$ Zahl”
folgt via **95-6**: $\sqrt{x}$ Menge.

6: Aus 5“$\sqrt{x}$ Menge”
folgt via **321-9**: $(x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) \wedge (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

7.1: Aus 6“$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \ldots$” und
aus VS
folgt: $x = -x$.

7.2: Aus 6“$\ldots x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus **317-11**“$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **0-4**: $x \in \mathbb{T}$.

8: Aus 7.1“$x = -x$” und
aus 7.2“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **149-8**: $(x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan}).$$

Beweis **321-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = 0) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

1.1: aus 0.1.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

1.2: Aus **318-3**“$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{A}$” und
aus 0.1.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **0-4**: $x \notin \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

2: Aus 1.2 und
aus **318-5**“$\mathsf{dom}\,(\sqrt{.}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$”
folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,(\sqrt{.})$.

3: Aus 2“$x \notin \mathsf{dom}\,(\sqrt{.})$”
folgt via **17-4**: $\sqrt{x} = \mathcal{U}$.

4: $-x \stackrel{1.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U} \stackrel{3}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $x = 0$.

$$-x \stackrel{\text{0.2.Fall}}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0 \stackrel{\cdot\mathbf{schola}}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\mathbf{318-7}}{=} \sqrt{0} \cdot \sqrt{0} \stackrel{\text{0.2.Fall}}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}.$$

$\boxed{\texttt{0.3.Fall}}$ $x = \mathsf{nan}$.

$$-x \stackrel{\text{0.3.Fall}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{318-7}}{=} \sqrt{\mathsf{nan}} \cdot \sqrt{\mathsf{nan}} \stackrel{\text{0.3.Fall}}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}.$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $-x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

□

321-15. Verglichen mit **321-10,14** ist die Gleichung $-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$ weit verbreitet, wenn auch nicht global gültig.

321-15(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

`ii)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [\,-\infty|0\,])$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **321-15**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

1: Aus `VS` gleich "$-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$"
folgt via **321-10**: $(-x = \mathcal{U}) \vee (-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $-x = \mathcal{U}$.

Aus `1.1.Fall`"$-x = \mathcal{U}$"
folgt via **96-12**: $x \notin \mathbb{A}$.

`1.2.Fall` $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Aus `1.2.Fall`"$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-13**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

1: Aus `0.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$-x = \mathcal{U}$"
folgt via **321-10**: $-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

`0.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

1: Aus `0.2.Fall`$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$
folgt via **321-13**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

2: Aus 1"$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-10**: $-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-x = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

□

321-16. Die vertraute Gleichung $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

321-16.Bemerkung

a) Die Aussage
“ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

b) Die Aussage
“ $(x \in \mathbb{C}) \Rightarrow (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

c) Die Aussage
“ $(y \in \mathbb{C}) \Rightarrow (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|)$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

RECH-**Notation**.

321-17. Selbst wenn x eine komplexe Zahl ist folgt ohne Weiters $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

321-17.BEISPIEL Es gelte:

→) $x = 1 + \mathsf{i}$.

→) $y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{C}$.

b) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

c) $|x| = \sqrt{2}$.

d) $|y| = +\infty$.

e) $|x \cdot y| = \mathsf{nan}$.

f) $|x| \cdot |y| = +\infty$.

g) $|x \cdot y| \neq |x| \cdot |y|$.

RECH-**Notation**.

321-18. Auch wenn y eine komplexe Zahl ist folgt nicht ohne Weiters $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

<u>**321-18.BEISPIEL**</u> Es gelte:

→) $x = (-\infty) + \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

→) $y = 1 + \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $y \in \mathbb{C}$.

b) $x \cdot y = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

c) $|x| = +\infty$.

d) $|y| = \sqrt{2}$.

e) $|x \cdot y| = \mathsf{nan}$.

f) $|x| \cdot |y| = +\infty$.

g) $|x \cdot y| \neq |x| \cdot |y|$.

<u>RECH-**Notation**</u>.

321-19. In drei prominenten Situationen gilt $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

321-19(Satz)

a) *Aus* “$x \in \mathbb{T}$” *folgt* “$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$”.

b) *Aus* “$y \in \mathbb{T}$” *folgt* “$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$”.

c) *Aus* “$x, y \in \mathbb{C}$” *folgt* “$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$”.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **321-19**</u> `a)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **145-7**: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`2:` Aus `1.2`"x Zahl"
folgt via **321-4**: $\mathsf{ab2}(x) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` y Zahl.

`4:` Aus `3.1.Fall`"y Zahl"
folgt via **321-4**: $\mathsf{ab2}(y) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`5:` Aus 2"$\mathsf{ab2}(x) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus 4"$\mathsf{ab2}(y) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-14**: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)} = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(y)}$.

`6:` $|x \cdot y| \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x \cdot y)} \stackrel{1.1}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)}$
$\stackrel{5}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(y)} \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} |x| \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(y)} \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} |x| \cdot |y|$.

`3.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`4.1:` Aus `3.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`4.2:` aus `3.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **321-8**: $|y| = \mathcal{U}$.

`5:` $|x \cdot y| \stackrel{4.1}{=} |\mathcal{U}| \stackrel{\mathbf{321-8}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} |x| \cdot \mathcal{U} \stackrel{4.2}{=} |x| \cdot |y|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

`b)` `VS` gleich $y \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $|y \cdot x| = |y| \cdot |x|$.

`2:` $|x \cdot y| \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} |y \cdot x| \stackrel{1}{=} |y| \cdot |x| \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} |x| \cdot |y|$.

<u>Beweis **321-19**</u> `c)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x, y Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **145-7**: $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$.

`2:` Aus `1.1`"x, y Zahl"
folgt via **321-4**: $\mathsf{ab2}(x), \mathsf{ab2}(y) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{ab2}(x), \mathsf{ab2}(y) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-14**: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)} = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(y)}$.

`4:` $|x \cdot y| \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x \cdot y)} \stackrel{1.2}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)}$
$\stackrel{3}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(y)} \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} |x| \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(y)} \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} |x| \cdot |y|$.

$\square$

321-20. Es gilt gelegentlich $x = |x|$.

321-20(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = |x|$.

`ii)` $x = |-x|$.

`iii)` $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **321-20**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = |x|$.

`1`: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`2`: Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $x = |-x|$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x = |-x|$.

`1`: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`2`: Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $x = |x|$.

`3`: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` x Zahl.

`4`: Aus `3.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **321-8**: $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`5`: Aus `2` und
aus `4`
folgt: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`4`: Aus `3.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **321-8**: $|x| = \mathcal{U}$.

`5`: Aus `2` und
aus `4`
folgt: $x = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

Beweis **321-20** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $x = \mathcal{U}$.

$$x \stackrel{\texttt{0.1.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{321-8}}{=} |\mathcal{U}| \stackrel{\texttt{0.1.Fall}}{=} |x|.$$

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1.1:` Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-10**: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`1.2:` Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-14**: $\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`1.3:` Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.3` "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **321-8**: $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

`3:` $$x \stackrel{\texttt{1.1}}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \stackrel{\texttt{1.2}}{=} \sqrt{x \cdot x} \stackrel{\texttt{2}}{=} |x|.$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x = |x|$.

□

321-21. Mitunter gilt $x = -|x|$.

321-21(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = -|x|$.

`ii)` $x = -|-x|$.

`iii)` $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [\,-\infty|0\,])$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-21** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = -|x|$.

1: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

2: Aus `VS` und
aus 1
folgt: $x = -|-x|$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x = -|-x|$.

1: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

2: Aus `VS` und
aus 1
folgt: $x = -|x|$.

3: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` x Zahl.

4: Aus `3.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **321-8**: $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

5: Aus 4 "$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ "
folgt via **321-13**: $-|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

6: Aus 2 und
aus 5
folgt: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

4: Aus `3.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **321-8**: $|x| = \mathcal{U}$.

5: Aus 2 und
aus 4
folgt: $x = -\mathcal{U}$.

6: Aus 5 und
aus **96-19** "$-\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $x = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

<u>Beweis **321-21**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

$$x \overset{\texttt{0.1.Fall}}{=} \mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \overset{\mathbf{321-8}}{=} -|\mathcal{U}| \overset{\texttt{0.1.Fall}}{=} -|x|.$$

`0.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`1:` Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$"
folgt via **321-13**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`2.1:` Aus `1` "$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **ElementAxiom**: $-x$ Menge.

`2.2:` Aus `1` "$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **321-20**: $-x = |-x|$.

`3.1:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`3.2:` Aus `2.1` "$-x$ Menge"
folgt via **96-11**: x Zahl.

`4:` Aus `2.2` "$-x = |-x|$" und
aus `3.2` "x Zahl"
folgt via **100-11**: $x = -|-x|$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.1`
folgt: $x = -|x|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = -|x|$.

□

321-22. Mitunter gilt $-x = |x|$. Dies ist von $x = -|x|$ zu unterscheiden.

321-22(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-x = |x|$.

`ii)` $-x = |-x|$.

`iii)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [\,-\infty|0\,])$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-22** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $-x = |x|$.

`1:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $-x = |-x|$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-x = |-x|$.

`1:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $-x = |x|$.

`3:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` x Zahl.

`4:` Aus `3.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **321-8**: $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`5:` Aus `2` und
aus `4`
folgt: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`6:` Aus `5` "$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **321-13**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

Beweis **321-22** `iii) ⇒ i)` `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

1.1: Aus `0.1.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

1.2: Aus `0.1.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **321-8**: $|x| = \mathcal{U}$.

2: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $-x = |x|$.

`0.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

1: Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$"
folgt via **321-13**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

2: Aus `1` "$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **321-20**: $-x = |-x|$.

3: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

4: Aus `2` und
aus `3`
folgt: $-x = |x|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-x = |x|$.

□

321-23. Das Bestehen der Gleichung $-x = -|x|$ unterscheidet sich vom Bestehen der Gleichung $x = |x|$.

321-23(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-x = -|x|$.

`ii)` $-x = -|-x|$.

`iii)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-23** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $-x = -|x|$.

1: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

2: Aus `VS` und
aus 1
folgt: $-x = -|-x|$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-x = -|-x|$.

1: Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

2: Aus `VS` und
aus 1
folgt: $-x = -|x|$.

3: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` x Zahl.

4: Aus `3.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **321-8**: $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

5: Aus 4 "$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **321-13**: $-|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

6: Aus 2 und
aus 5
folgt: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

7: Aus 6 "$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$"
folgt via **321-13**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`3.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty])$.

<u>Beweis **321-23**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

1: Aus `0.1.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

2: $-x \stackrel{1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{321-8}}{=} -|\mathcal{U}| \stackrel{1}{=} -|-x| \stackrel{\mathbf{321-8}}{=} -|x|$.

`0.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

1: Aus `0.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-20**: $x = |x|$.

2: Aus 1
folgt: $-x = -|x|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-x = -|x|$.

□

321-24. Die allzu oft auftretende Aufgabe, aus dem Element-Sein von $f(x)$ mit $f : D \to B$ auf $f(x) \in B$ zu schließen, wird hier bearbeitet.

321-24(Satz)

Aus "$f : D \to B$" *und* "$f(x) \in y$" *folgt* "$f(x) \in B$".

Beweis **321-24** VS gleich $(f : D \to B) \wedge (f(x) \in y)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots f(x) \in y$"
folgt via **ElementAxiom**: $f(x)$ Menge.

2: Aus 1"$f(x)$ Menge"
folgt via **17-5**: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3: Aus VS gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f$ Funktion$) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

4: Aus 3"f Funktion…" und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

5: Aus 4"$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus 3"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **0-4**: $f(x) \in B$.

□

321-25. Die Zugehörigkeit zu $\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$ und zu $\mathbb{R},\mathbb{S},\mathbb{T}$ wird hier diskutiert.

321-25(Satz)

a) *"$x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$" und "$x\in\mathbb{R}$"*
genau dann, wenn "$0\le x\in\mathbb{R}$".

b) *"$x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$" und "$x\in\mathbb{S}$"*
genau dann, wenn "$0\le x$".

c) *"$x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$" und "$x\in\mathbb{T}$"*
genau dann, wenn "$x\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$".

$\le$-**Notation**.

<u>Beweis **321-25**</u> `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \ldots$"
folgt via **317-8**: $(0 \leq x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.1.Fall` $0 \leq x$.

Aus `1.1.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{R}$.

`3:` Via **AAI** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

`a)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"

folgt via **317-8**: $\boxed{x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]}$

`1.2:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

<u>Beweis **321-25**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]) \wedge (x \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \ldots$"
folgt via **317-8**: $(0 \leq x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \leq x$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{S}$.

`3:` Via **95-11** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq x$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \leq x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **317-8**: $\boxed{x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **107-3**: $\boxed{x \in \mathbb{S}}$

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

Aus `VS`
folgt: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $\boxed{x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt: $\boxed{x \in \mathbb{T}}$

$\square$

321-26. Noch immer ist die Liste der äquivalenten Formulierungen von "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$" nicht vollständig.

321-26(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`ii)` $(0 \leq x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

≤-Notation.

Beweis **321-26** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty]$"
folgt via **317-8**: $(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x = 0$.

Aus ≤**schola**"$0 \leq 0$",
aus ∈**schola**"$0 \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall`
folgt: $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 < x < +\infty$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$0 < x < +\infty$"
folgt via **107-12**: $x \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:
$(0 \leq x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Beweis **321-26** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $(0 \le x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $0 \le x \in \mathbb{R}$.

Aus $\texttt{0.1.Fall}$ "$0 \le x \ldots$"

folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $(x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

Aus $\texttt{0.2.Fall}$ "$(x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$"

folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

□

321-27. Anhand von $\sqrt{x}$ kann gelegentlich auf $0 \leq x \in \mathbb{R}$ oder $x = +\infty$ oder $x = \mathsf{nan}$ geschlossen werden.

321-27(Satz)

a) "$\sqrt{x} = +\infty$" *genau dann, wenn* "$x = +\infty$".

b) "$\sqrt{x} = \mathsf{nan}$" *genau dann, wenn* "$x = \mathsf{nan}$".

c) "$\sqrt{x} \in \mathbb{R}$" *genau dann, wenn* "$0 \leq \sqrt{x} \in \mathbb{R}$"
genau dann, wenn "$0 \leq x \in \mathbb{R}$".

d) "$0 \leq \sqrt{x}$" *genau dann, wenn* "$0 \leq \sqrt{x} \in \mathbb{S}$"
genau dann, wenn "$\sqrt{x} \in \mathbb{S}$"
genau dann, wenn $0 \leq x \in \mathbb{S}$
genau dann, wenn "$0 \leq x$".

$\leq$-Notation.

Beweis **321-27**

`RECH`-**Notation**.

---

a) $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\sqrt{x} = +\infty$.

1: Aus `VS` gleich "$\sqrt{x} = +\infty$" und
aus **95-3** "$+\infty$ Menge"
folgt: $\sqrt{x}$ Menge.

2: Aus 1 "$\sqrt{x}$ Menge"
folgt via **321-9**: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

3: $$x \stackrel{2}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty.$$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x = +\infty$.

$$\sqrt{x} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \sqrt{+\infty} \stackrel{\mathbf{318\text{-}7}}{=} +\infty.$$

Beweis **321-27** b) $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ VS gleich $\sqrt{x} = \mathsf{nan}$.

1: Aus VS gleich “$\sqrt{x} = \mathsf{nan}$” und
aus **95-3**“nan Menge”
folgt: $\sqrt{x}$ Menge.

2: Aus 1“$\sqrt{x}$ Menge”
folgt via **321-9**: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

3: $x \stackrel{2}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

b) $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ VS gleich $x = \mathsf{nan}$.

$\sqrt{x} \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \sqrt{\mathsf{nan}} \stackrel{\mathbf{318-7}}{=} \mathsf{nan}$.

c) $\boxed{\boxed{\mathtt{i)} \Rightarrow \mathtt{ii)}}}$ VS gleich $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

1: Aus **321-4**“$\sqrt{\cdot} : \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus VS gleich “$\sqrt{x} \in \mathbb{R}$”
folgt via **321-24**: $\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

2: Aus 1“$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus VS gleich “$\sqrt{x} \in \mathbb{R}$”
folgt via **321-5**: $0 \le \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **321-27**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \leq \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \sqrt{x} \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $\sqrt{x} \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \sqrt{x} \in \mathbb{R}$"
folgt via **321-9**: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots \sqrt{x} \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \sqrt{x} \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

`2.2:` Aus `1.1`"$\sqrt{x} \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \leq \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{0 \leq x}$

<u>Beweis **321-27**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \le x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2:` Aus 1"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **318-5**: $\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3:` Aus 2"$\sqrt{x} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-26**: $(0 \le \sqrt{x} \in \mathbb{R}) \vee (\sqrt{x} = +\infty) \vee (\sqrt{x} = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $0 \le \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

Aus `3.1.Fall`
folgt: $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

`3.2.Fall` $\sqrt{x} = +\infty$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\sqrt{x} = +\infty$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x = +\infty$.

`5:` Aus 4 und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt: $+\infty \in \mathbb{R}$.

`6:` Via **AAI** gilt: $+\infty \notin \mathbb{R}$.

`3.3.Fall` $\sqrt{x} = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$\sqrt{x} = \mathsf{nan}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x = \mathsf{nan}$.

`5:` Aus 4 und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{R}$.

`6:` Via **AAI** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> **321-27** `d)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \le \sqrt{x}$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{0 \le \sqrt{x}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 \le \sqrt{x}$”

folgt via **107-3**: $\boxed{\sqrt{x} \in \mathbb{S}}$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \le \sqrt{x} \in \mathbb{S}$.

Aus `VS`

folgt: $\sqrt{x} \in \mathbb{S}$.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\sqrt{x} \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\sqrt{x} \in \mathbb{S}$”
folgt via **127-8**: $0 \le \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\sqrt{x} \in \mathbb{S}$” und
aus `VS` gleich “$\sqrt{x} \in \mathbb{S}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\sqrt{x} \in \mathbb{S}$”
folgt via **321-9**: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.3`

folgt: $\boxed{0 \le x}$

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`

folgt: $\boxed{x \in \mathbb{S}}$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $0 \le x \in \mathbb{S}$.

Aus `VS`

folgt: $0 \le x$.

<u>Beweis **321-27**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \le x.$

`1:` Es gilt: $(x = +\infty) \vee (x \ne +\infty).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = +\infty.$

`2:` Aus `1.1.Fall` “$x = +\infty$” folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\sqrt{x} = +\infty.$

`3:` Aus **165-3** “$0 \le +\infty$” und aus `2` folgt: $0 \le \sqrt{x}.$

`1.2.Fall` $x \ne +\infty.$

`2:` Aus `VS` gleich “$0 \le x$” folgt via **107-17**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty).$

`3:` Aus `2` und aus `1.2.Fall` folgt: $x \in \mathbb{R}.$

`4:` Aus `VS` gleich “$0 \le x$” und aus `3` “$x \in \mathbb{R}$” folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $0 \le \sqrt{x} \in \mathbb{R}.$

`5:` Aus `4` folgt: $0 \le \sqrt{x}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \le \sqrt{x}.$

$\square$

321-28. Ähnlich wie mit $\mathsf{ab2}$ kann mit $|.|$ die Zugehörigkeit zu $\mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}, \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ erkannt werden.

321-28(Satz)

a) "$|x| \in \mathbb{R}$" *genau dann, wenn* "$0 \le |x| \in \mathbb{R}$"
genau dann, wenn "$0 \le \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$"
genau dann, wenn "$x \in \mathbb{C}$".

b) "$|x| \in \mathbb{S}$" *genau dann, wenn* "$0 \le |x| \in \mathbb{S}$"
genau dann, wenn "$0 \le |x|$"
genau dann, wenn "$0 \le \mathsf{ab2}(x)$"
genau dann, wenn "$x \in \mathbb{B}$".

c) "$|x| = +\infty$" *genau dann, wenn* "$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$"
genau dann, wenn "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$".

d) "$|x| = \mathsf{nan}$" *genau dann, wenn* "$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$"
genau dann, wenn "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$".

≤-Notation.

Beweis **321-28** a) $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich $|x| \in \mathbb{R}$.

1: Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

2: Aus 1 und
aus VS
folgt: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2"$\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{R}$"
folgt via **321-27**: $0 \le \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{R}$.

4: Aus 3 und
aus 1
folgt: $0 \le |x| \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **321-28**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 \leq |x| \in \mathbb{R}$.

`1:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $0 \leq \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`“$0 \leq \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{R}$”
folgt via **321-27**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.
Aus `VS` gleich “$0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **128-9**: $x \in \mathbb{C}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **128-9**: $0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`“$0 \leq \mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **321-27**: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{R}$.

`3:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $|x| \in \mathbb{R}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $|x| \in \mathbb{S}$.

`1:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{S}$”
folgt via **321-27**: $0 \leq \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`
folgt: $0 \leq |x| \in \mathbb{S}$.

<u>Beweis **321-28**</u> `b)` $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \le |x| \in \mathbb{S}$.
Aus `VS`
folgt: $0 \le |x|$.

`b)` $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $0 \le |x|$.

`1:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`2:` Aus `VS` und
aus `1`
folgt: $0 \le \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`3:` Aus `2`“$0 \le \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$”
folgt via **321-27**: $0 \le \mathsf{ab2}(x)$.

`b)` $\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}$ `VS` gleich $0 \le \mathsf{ab2}(x)$.
Aus `VS` gleich “$0 \le \mathsf{ab2}(x)$”
folgt via **128-5**: $x \in \mathbb{B}$.

`b)` $\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **128-5**: $0 \le \mathsf{ab2}(x)$.

`2:` Aus `1`“$0 \le \mathsf{ab2}(x)$”
folgt via **321-27**: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \in \mathbb{S}$.

`3:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $|x| \in \mathbb{S}$.

`c)` $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $|x| = +\infty$.

`1:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = +\infty$.

`3:` Aus `2`“$\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = +\infty$”
folgt via **321-27**: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$.

<u>Beweis **321-28**</u> `c)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) = +\infty.$

Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$"
folgt via **128-8**: $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}.$

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **128-8**: $\mathsf{ab2}(x) = +\infty.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ab2}(x) = +\infty$"
folgt via **321-27**: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = +\infty.$

`3:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}.$

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $|x| = +\infty.$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $|x| = \mathsf{nan}.$

`1:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}.$

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = \mathsf{nan}.$

`3:` Aus `2`"$\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = \mathsf{nan}$"
folgt via **321-27**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}.$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}.$

Aus `VS` gleich "$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **128-7**: $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}.$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **128-7**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{nan}$"
folgt via **321-27**: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = \mathsf{nan}.$

`3:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}.$

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $|x| = \mathsf{nan}.$

$\square$

321-29. Gelegentlich wird die Alternative $x = |x|$ oder $x = -|x|$ verwendet.

321-29(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

`ii)` $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-29**

$\leq$-**Notation**.

`i) ⇒ ii)` `VS` gleich $(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x = |x|$.

`1:` Aus `0.1.Fall` "$x = |x|$"
folgt via **321-20**: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Aus `1.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

...

Beweis **321-29** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`0.2.Fall` $x = -|x|$.

1: Aus `0.2.Fall` "$x = -|x|$"
folgt via **321-21**: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

2: Aus `1.2.Fall` "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$"
folgt via **321-13**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

3: Aus 2 "$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $-x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 3 "$-x \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

Beweis **321-29** `ii) ⇒ i)` VS gleich $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

Aus `0.1.Fall` "$x = \mathcal{U}$"
folgt via **321-20**: $x = |x|$.

`0.2.Fall` $x \in \mathbb{T}$.

1: Aus `0.2.Fall` "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **107-19**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

2: Aus `1.1.Fall` "$x < 0$"
folgt via **321-13**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

3: Aus 2 "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$"
folgt via **321-21**: $x = -|x|$.

`1.2.Fall` $(x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

2: Aus `1.2.Fall` "$(x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$"
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

3: Aus 2 "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **321-20**: $x = |x|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

□

321-30. Die Alternative $|x| = x$ oder $|x| = -x$ ist ebenfalls von Interesse.

321-30(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

`ii)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-30**

$\leq$-**Notation**.

`i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $|x| = x$.

`1:` Aus `0.1.Fall` folgt: $x = |x|$.

`2:` Aus `1`"$x = |x|$" folgt via **321-20**: $(x = \mathcal{U}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`3:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`4:` Aus `2.1.Fall` und aus `3` folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

`1.2.Fall` $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Aus `1.2.Fall`"$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und aus **317-11**"$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$" folgt via **0-4**: $x \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

...

<u>Beweis **321-30**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $|x| = -x$.

`1:` Aus `0.2.Fall` folgt: $-x = |x|$.

`2:` Aus `1`“$-x = |x|$” folgt via **321-22**: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0])$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$” folgt via **321-13**: $-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`4:` Aus `3`“$-x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$” und aus **317-11**“$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$” folgt via **0-4**: $-x \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$-x \in \mathbb{T}$” folgt via **117-4**: $x \in \mathbb{T}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

Beweis **321-30** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

1: Aus `0.1.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **321-22**: $-x = |x|$.

2: Aus 1 folgt: $|x| = -x$.

`0.2.Fall` $x \in \mathbb{T}$.

1: Aus `0.2.Fall`“$x \in \mathbb{T}$” folgt via **107-19**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

2: Aus `1.1.Fall`“$x < 0$” folgt via **321-13**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

3: Aus 2“$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$” folgt via **321-22**: $-x = |x|$.

4: Aus 3 folgt: $|x| = -x$.

`1.2.Fall` $(x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$.

2: Aus `1.2.Fall`“$(x = 0) \vee (0 < x) \vee (x = \mathsf{nan})$” folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

3: Aus 2“$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$” folgt via **321-20**: $x = |x|$.

4: Aus 3 folgt: $|x| = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(|x| = x) \vee (|x| = -x)$.

□

321-31. Die Ungleichung $-|x| \le |x|$ besteht genau in $\mathbb{B}$.

321-31(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $-|x| \le |x|$.

`ii)` $x \in \mathbb{B}$.

$\le$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **321-31** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $-|x| \le |x|$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-|x| \le |x|$"
folgt via **107-3**: $|x| \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$|x| \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-28**: $x \in \mathbb{B}$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **321-28**: $0 \le |x|$.

`2:` Aus `1`"$0 \le |x|$"
folgt via **165-1**: $-|x| \le |x|$.

□

321-32. Die Ungleichungen $-|x| \leq x \leq |x|$ gelten genau für $x \in \mathbb{S}$.

321-32(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $-|x| \leq x$.

`ii)` $x \leq |x|$.

`iii)` $-|x| \leq x \leq |x|$.

`iv)` $x \in \mathbb{S}$.

$\leq$`.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **321-32** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $-|x| \le x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$-|x| \le x$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}.$

`2.1:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}, \mathbb{B}.$

`2.2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \le x.$

`3:` Aus `2.1`"$x \in \ldots \mathbb{B}$"
folgt via **321-31**: $-|x| \le |x|.$

`4:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **321-30**: $(x = |x|) \vee (x = -|x|).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{4.1.Fall}}$ $x = |x|.$

Aus `4.1.Fall` und
aus `2.2`
folgt: $x \le |x|.$

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $x = -|x|.$

Aus `4.2.Fall` und
aus `3`
folgt: $x \le |x|.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $x \le |x|.$

<u>Beweis **321-32**</u> $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $x \le |x|$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \le |x|$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}, \mathbb{B}$.

`2.2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $x \le x$.

`3:` Aus `2.1`“$x \in \ldots \mathbb{B}$”
folgt via **321-31**: $-|x| \le |x|$.

`4.1:` Aus `2.1`“$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **321-30**: $(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $x = |x|$.
Aus `4.1.1.Fall` und
aus `3`
folgt: $-x \le |x|$.

`4.1.2.Fall` $x = -|x|$.
Aus `4.1.2.Fall` und
aus `2.2`
folgt: $-|x| \le x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$-|x| \le x$”

`4.2:` Aus `A1` und
aus `VS`
folgt: $-|x| \le x \le |x|$.

<u>Beweis **321-32**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $-|x| \leq x \leq |x|$.

Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq |x|$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}, \mathbb{B}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \leq x$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \ldots \mathbb{B}$"
folgt via **321-31**: $-|x| \leq |x|$.

`3:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **321-30**: $(x = |x|) \vee (x = -|x|)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x = |x|$.

Aus `3.1.Fall` und
aus `2`
folgt: $-|x| \leq x$.

`3.2.Fall` $x = -|x|$.

Aus `3.2.Fall` und
aus `1.2`
folgt: $-|x| \leq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-|x| \leq x$.

$\square$

Mengenlehre: Umkehrung lokal streng istotoner/antitoner, injekiver Funktionen.

Ersterstellung: 09/01/15 **Letzte Änderung: 09/01/15**

322-1. Aus $(p,q)\in(x\downharpoonleft E)$ folgt $q\in x[E]$.

322-1(Satz)

a) *Aus* "$y\in(x\downharpoonleft E)$"*folgt* "$y\in x$".

b) *Aus* "$(p,q)\in(x\downharpoonleft E)$"*folgt* "$(q,p)\in x^{-1}$".

c) *Aus* "$(p,q)\in(x\downharpoonleft E)$"*folgt* "$q\in x[E]$".

Beweis **322-1** a) VS gleich $y\in(x\downharpoonleft E)$.

1: Via **261-1** gilt: $(x\downharpoonleft E)\subseteq x$.

2: Aus VS gleich "$y\in(x\downharpoonleft E)$" und
aus 1"$(x\downharpoonleft E)\subseteq x$"
folgt via **0-4**: $y\in x$.

bc) VS gleich $(p,q)\in(x\downharpoonleft E)$.

1: Aus VS gleich "$(p,q)\in(x\downharpoonleft E)$"
folgt via **299-5**: $(p\in E)\wedge((p,q)\in x)$.

2.b): Aus 1"$\ldots(p,q)\in x$"
folgt via **11-4**: $(q,p)\in x^{-1}$.

2.c): Aus 1"$(p\in E)\wedge((p,q)\in x)$"
folgt via **8-8**: $q\in x[E]$.

□

322-2. Die Gleichung $(x \upharpoonleft E)^{-1} = (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$ gilt interessanter Weise für jede injektive Klasse x.

322-2(Satz)

a) *Aus "$(p,q) \in x$ injektiv" folgt "$p = x^{-1}(q)$".*

b) *Aus "$(p,q) \in x$ injektiv" und "$q \in x[E]$" folgt "$p \in E$".*

c) $(x \upharpoonleft E)^{-1} \subseteq (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$.

d) *Aus "x injektiv" folgt "$(x \upharpoonleft E)^{-1} = (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$".*

Beweis **322-2** a) VS gleich $(p,q) \in x$ injektiv.

1: Aus VS gleich "$\ldots x$ injektiv"
folgt via **19-1**: x^{-1} Funktion.

2: Aus VS gleich "$(p,q) \in x \ldots$"
folgt via **11-4**: $(q,p) \in x^{-1}$.

3: Aus 1 "x^{-1} Funktion" und
aus 2 "$(q,p) \in x^{-1}$"
folgt via **18-20**: $p = x^{-1}(q)$.

b) VS gleich $((p,q) \in x \text{ injektiv}) \wedge (q \in x[E])$.

1: Aus VS gleich "$\ldots q \in x[E]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge ((\Omega, q) \in x)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots x$ injektiv$\ldots$",
aus VS gleich "$(p,q) \in x \ldots$" und
aus 1 "$\ldots (\Omega, q) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $p = \Omega$.

3: Aus 2 und
aus 1 "$\ldots \Omega \in E \ldots$"
folgt: $p \in E$.

Beweis **322-2** `c)`

`Thema1`	$\alpha \in (x \downharpoonleft E)^{-1}$.
`2`: Aus `Thema1`"$\alpha \in (x \downharpoonleft E)^{-1}$" folgt via **11-3**:	$\exists \Omega, \Phi : (\alpha = (\Omega, \Phi)) \wedge ((\Phi, \Omega) \in (x \downharpoonleft E))$.
`3.1`: Aus `2`"$\ldots (\Phi, \Omega) \in (x \downharpoonleft E)$" folgt via **322-1**:	$\Omega \in x[E]$.
`3.2`: Aus `2`"$\ldots (\Phi, \Omega) \in (x \downharpoonleft E)$" folgt via **322-1**:	$(\Omega, \Phi) \in x^{-1}$.
`4`: Aus `3.2`"$(\Omega, \Phi) \in x^{-1}$" und aus `3.1`"$\Omega \in x[E]$" folgt via **299-5**:	$(\Omega, \Phi) \in (x^{-1} \downharpoonleft x[E])$.
`5`: Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$" und aus `4` folgt:	$\alpha \in (x^{-1} \downharpoonleft x[E])$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \downharpoonleft E)^{-1}) \Rightarrow (\alpha \in (x^{-1} \downharpoonleft x[E])))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(x \downharpoonleft E)^{-1} \subseteq (x^{-1} \downharpoonleft x[E])$.

<u>Beweis **322-2**</u> `d)` `VS` gleich x injektiv.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$

`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$”
folgt via **315-9**: $\exists \Omega, \Phi : (\alpha = (\Omega, \Phi) \in x^{-1}) \wedge (\Omega \in x[E])$.

`3:` Aus `2`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in x^{-1} \ldots$”
folgt via **11-4**: $(\Phi, \Omega) \in x$.

`4:` Aus `3`“$(\Phi, \Omega) \in x$”,
aus `VS` gleich “x injektiv” und
aus `2`“$\ldots \Omega \in x[E]$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\Phi \in E$.

`5:` Aus `3`“$(\Phi, \Omega) \in x$” und
aus `4`“$\Phi \in E$”
folgt via **299-5**: $(\Phi, \Omega) \in (x \upharpoonleft E)$.

`6:` Aus `5`“$(\Phi, \Omega) \in (x \upharpoonleft E)$”
folgt via **11-4**: $(\Omega, \Phi) \in (x \upharpoonleft E)^{-1}$.

`7:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$” und
aus `6`
folgt: $\alpha \in (x \upharpoonleft E)^{-1}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x^{-1} \upharpoonleft x[E])) \Rightarrow (\alpha \in (x \upharpoonleft E)^{-1})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$(x^{-1} \upharpoonleft x[E]) \subseteq (x \upharpoonleft E)^{-1}$”

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(x \upharpoonleft E)^{-1} \subseteq (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$.

`2:` Aus `1.2`“$(x \upharpoonleft E)^{-1} \subseteq (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$” und
aus `A1` gleich “$(x^{-1} \upharpoonleft x[E]) \subseteq (x \upharpoonleft E)^{-1}$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(x \upharpoonleft E)^{-1} = (x^{-1} \upharpoonleft x[E])$.

□

322-3. Hier werden Zwischen-Resultate für das Weitere bewiesen.

322-3(Satz)

a) $x[E] \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

b) *Aus “f Funktion” und “f injektiv” und “$f(p) = q \in x$” folgt “$p = f^{-1}(q)$”.*

Beweis **322-3** a)

1.1: Via **8-10** gilt: $x[E] \subseteq \mathsf{ran}\, x$.

2: Via **11-7** gilt: $\mathsf{dom}\,(x^{-1}) = \mathsf{ran}\, x$.

3: Aus 1.1 und
aus 2
folgt: $x[E] \subseteq \mathsf{dom}\,(x^{-1})$.

b) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \wedge (f(p) = q \in x)$.

1: Aus VS gleich “$\ldots f(p) = q \in x$”
folgt: $f(p) \in x$.

2: Aus 1“$f(p) \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: $f(p)$ Menge.

3: Aus 2“$f(p)$ Menge”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus VS gleich “$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \ldots$” und
aus 3“$p \in \mathsf{dom}\, x$”
folgt via **19-5**: $p = f^{-1}(f(p))$.

5: Aus 4 und
aus VS gleich “$\ldots f(p) = q \ldots$”
folgt: $p = f^{-1}(q)$.

□

322-4. Unter einigen Zusatzvoraussetzungen vererbt sich strenge Isotonie von f auf f^{-1}. Interessanter Weise reicht die aus den Voraussetzungen "f Funktion", "f streng M_isoton auf E" und "E ist M_Kette" deduzierbare Injektivität von f *auf* E nicht aus, um auf die strenge M_Isotonie von f^{-1} auf $f[E]$ zu schließen.

322-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) *f Funktion.*

$\rightarrow$) *f injektiv.*

$\rightarrow$) *f streng M_isoton auf E.*

$\rightarrow$) *E ist M_Kette.*

$\rightarrow$) *M antiSymmetrisch.*

Dann folgt "f^{-1} streng M_isoton auf $f[E]$".

<u>Beweis **322-4**</u>

`Thema1.1` $(\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}\beta)$.

`2.1:` Aus →) “f Funktion…” und
aus `Thema1.1` “$\alpha \ldots \in f[E] \ldots$”
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = f(\Omega))$.

`2.2:` Aus →) “f Funktion…” und
aus `Thema1.1` “$\ldots \beta \in f[E] \ldots$”
folgt via **18-28**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\beta = f(\Phi))$.

`3:` Aus `Thema1.1` “$\ldots \alpha_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}\beta$”,
aus `2.1` “$\ldots \alpha = f(\Omega)$” und
aus `2.2` “$\ldots \beta = f(\Phi)$”
folgt: $f(\Omega)_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}f(\Phi)$.

`4.1:` Aus `3` “$f(\Omega)_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}f(\Phi)$”
folgt via **41-3**: $f(\Omega) \neq f(\Phi)$.

`4.2:` Aus →) “M antiSymmetrisch” und
aus `3` “$f(\Omega)_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}f(\Phi)$”
folgt via **46-1**: $\neg(f(\Phi)_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}f(\Omega))$.

`5:` Aus `4.1` “$f(\Omega) \neq f(\Phi)$”
folgt via **94-10**: $\Omega \neq \Phi$.

`6:` Aus `2.1` “$\ldots \Omega \in E \ldots$”,
aus `2.2` “$\ldots \Phi \in E \ldots$” und
aus →) “E ist M_Kette”
folgt via **41-8**: $(\Omega_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}\Phi) \vee (\Omega = \Phi) \vee (\Phi_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}\Omega)$.

`7.1:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $(\Omega_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}\Phi) \vee (\Phi_{\_}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{\_}\Omega)$.

`Fallunterscheidung`

…

…

Beweis **322-4**

...

`Thema1.1` $(\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-\beta)$.

...

`Fallunterscheidung`

`7.1.1.Fall` $\Omega_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-\Phi$.

`7.1.2.Fall` $\Phi_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-\Omega$.

8: Aus →) "f Funktion",
aus →) "f streng M_isoton auf E",
aus 2.2 "$\ldots \Phi \in E \ldots$",
aus 2.1 "$\ldots \Omega \in E \ldots$" und
aus 7.1.2.Fall "$\Phi_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-\Omega$"
folgt via **320-9**: $f(\Phi)_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-f(\Omega)$.

9: Via 4.2 gilt: $\neg(f(\Phi)_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-f(\Omega))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

A1 | "$\Omega_- \overset{\textbf{ir}}{M} {}_-\Phi$"

...

...

Beweis **322-4**

...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\beta)$.

...

`7.2:` Aus →) " f Funktion ",
aus →) " f injektiv ",
aus `2.1` " $\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$ " und
aus `Thema1.1` " $\alpha \ldots \in f[E] \ldots$ "
folgt via **322-3**: $\Omega = f^{-1}(\alpha)$.

`7.3:` Aus →) " f Funktion ",
aus →) " f injektiv ",
aus `2.2` " $\ldots \beta = f(\Phi) \ldots$ " und
aus `Thema1.1` " $\ldots \beta \in f[E] \ldots$ "
folgt via **322-3**: $\Phi = f^{-1}(\beta)$.

`8:` Aus `A1`,
aus `7.2` und
aus `7.3`
folgt: $f^{-1}(\alpha)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f^{-1}(\beta)$.

Ergo `Thema1.1`:

`A2` | " $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\beta)) \Rightarrow (f^{-1}(\alpha)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f^{-1}(\beta))$ "

`1.2:` Aus →) " f injektiv "
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`1.3:` Via **322-3** gilt: $f[E] \subseteq \mathsf{dom}\,(f^{-1})$.

`2:` Aus `1.2` " f^{-1} Funktion ",
aus `1.3` " $f[E] \subseteq \mathsf{dom}\,(f^{-1}[E])$ " und
aus `A2` gleich " $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\beta)) \Rightarrow (f^{-1}(\alpha)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f^{-1}(\beta))$ "
folgt via **320-9**:
f^{-1} streng M_isoton auf $f[E]$.

□

322-5. Unter einigen Zusatzvoraussetzungen vererbt sich strenge Antitonie von f auf f^{-1}. Interessanter Weise reicht die aus den Voraussetzungen "f Funktion", "f streng M_antiton auf E" und "E ist M_Kette" deduzierbare Injektivität von f *auf* E nicht aus, um auf die strenge M_Antitonie von f^{-1} auf $f[E]$ zu schließen.

322-5(Satz) *Es gelte:*

→) *f Funktion.*

→) *f injektiv.*

→) *f streng M_antiton auf E.*

→) *E ist M_Kette.*

→) *M antiSymmetrisch.*

Dann folgt "f^{-1} streng M_antiton auf $f[E]$".

<u>Beweis **322-5**</u>

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\beta)$.

`2.1:` Aus →) “ f Funktion... ” und
aus `Thema1.1` “ $\alpha \ldots \in f[E] \ldots$ ”
folgt via **18-28**: $\exists \Omega : (\Omega \in E) \wedge (\alpha = f(\Omega))$.

`2.2:` Aus →) “ f Funktion... ” und
aus `Thema1.1` “ $\ldots \beta \in f[E] \ldots$ ”
folgt via **18-28**: $\exists \Phi : (\Phi \in E) \wedge (\beta = f(\Phi))$.

`3:` Aus `Thema1.1` “ $\ldots \alpha_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\beta$ ”,
aus `2.1` “ $\ldots \alpha = f(\Omega)$ ” und
aus `2.2` “ $\ldots \beta = f(\Phi)$ ”
folgt: $f(\Omega)_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}f(\Phi)$.

`4.1:` Aus `3` “ $f(\Omega)_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}f(\Phi)$ ”
folgt via **41-3**: $f(\Omega) \neq f(\Phi)$.

`4.2:` Aus →) “ M antiSymmetrisch ” und
aus `3` “ $f(\Omega)_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}f(\Phi)$ ”
folgt via **46-1**: $\neg(f(\Phi)_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}f(\Omega))$.

`5:` Aus `4.1` “ $f(\Omega) \neq f(\Phi)$ ”
folgt via **94-10**: $\Omega \neq \Phi$.

`6:` Aus `2.1` “ $\ldots \Omega \in E \ldots$ ”,
aus `2.2` “ $\ldots \Phi \in E \ldots$ ” und
aus →) “ E ist M_Kette ”
folgt via **41-8**: $(\Omega_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\Phi) \vee (\Omega = \Phi) \vee (\Phi_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\Omega)$.

`7.1:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $(\Omega_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\Phi) \vee (\Phi_{\text{-}} \overset{\textbf{ir}}{M} {}_{\text{-}}\Omega)$.
$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

<u>Beweis **322-5**</u>

...

`Thema1.1` $(\alpha, \beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\beta).$

...

`Fallunterscheidung`

`7.1.2.Fall` $\Omega_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\Phi.$

`8:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ f streng M_antiton auf E ” ,
aus `2.2`“ $\ldots \Omega \in E \ldots$ ” ,
aus `2.1`“ $\ldots \Phi \in E \ldots$ ” und
aus `7.1.2.Fall`“ $\Omega_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\Phi$”
folgt via **320-10**: $f(\Phi)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f(\Omega).$

`9:` Via `4.2` gilt: $\neg(f(\Phi)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f(\Omega)).$

`7.1.2.Fall` $\Phi_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\Omega.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “ $\Phi_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}\Omega$ ”

...

...

Beweis **322-5**

...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha,\beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta).$

...

`7.2:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ f injektiv ” ,
aus `2.1` “ $\ldots \alpha = f(\Omega) \ldots$ ” und
aus `Thema1.1` “ $\alpha \ldots \in f[E] \ldots$ ”
folgt via **322-3**: $\Omega = f^{-1}(\alpha).$

`7.3:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ f injektiv ” ,
aus `2.2` “ $\ldots \beta = f(\Phi) \ldots$ ” und
aus `Thema1.1` “ $\ldots \beta \in f[E] \ldots$ ”
folgt via **322-3**: $\Phi = f^{-1}(\beta).$

`8:` Aus `A1`,
aus `7.2` und
aus `7.3`
folgt: $f^{-1}(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f^{-1}(\alpha).$

Ergo `Thema1.1`:

`A2`	“ $\forall \alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta)) \Rightarrow (f^{-1}(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f^{-1}(\alpha))$ ”

`1.2:` Aus →) “ f injektiv ”
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`1.3:` Via **322-3** gilt: $f[E] \subseteq \mathsf{dom}\,(f^{-1}).$

`2:` Aus `1.2` “ f^{-1} Funktion ” ,
aus `1.3` “ $f[E] \subseteq \mathsf{dom}\,(f^{-1}[E])$ ” und
aus `A2` gleich “ $\forall \alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in f[E]) \wedge (\alpha_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\beta)) \Rightarrow (f^{-1}(\beta)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f^{-1}(\alpha))$ ”
folgt via **320-10**:
f^{-1} streng M_antiton auf $f[E]$.

□

322-6. Aus **322-4,5** ergeben sich zwei explizite Aussagen über $p, q \in f[E]$ mit $p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q$.

322-6(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "f injektiv"*
und "f streng M_isoton auf E"
und "E ist M_Kette" und "M antiSymmetrisch"
und "$p, q \in f[E]$" und "$p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q$"
folgt "$f^{-1}(p)_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f^{-1}(q)$".

b) *Aus "f Funktion" und "f injektiv"*
und "f streng M_antiton auf E"
und "E ist M_Kette" und "M antiSymmetrisch"
und "$p, q \in f[E]$" und "$p_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}q$"
folgt "$f^{-1}(q)_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f^{-1}(p)$".

<u>Beweis **322-6**</u> `a)` `VS` gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \wedge (f \text{ streng } M\text{\_isoton auf } E) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p, q \in f[E]) \wedge (p\,_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\,q).$$

`1:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f$ injektiv$) \wedge (f$ streng M_isoton auf $E)$ $\wedge(E$ ist M_Kette$) \wedge (M$ antiSymmetrisch$)$"
folgt via **322-4**: f^{-1} streng M_isoton auf $f[E]$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ injektiv$\ldots$"
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`3:` Aus `2`"f^{-1} Funktion",
aus `1`"f^{-1} streng M_isoton auf $f[E]$",
aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in f[E] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\,_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\,q$"
folgt via **320-9**: $f^{-1}(p)\,_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\,f^{-1}(q)$.

`b)` `VS` gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \wedge (f \text{ streng } M\text{\_antiton auf } E) \wedge (E \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p, q \in f[E]) \wedge (p\,_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\,q).$$

`1:` Aus `VS` gleich "$(f$ Funktion$) \wedge (f$ injektiv$) \wedge (f$ streng M_antiton auf $E)$ $\wedge(E$ ist M_Kette$) \wedge (M$ antiSymmetrisch$)$"
folgt via **322-4**: f^{-1} streng M_antiton auf $f[E]$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ injektiv$\ldots$"
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`3:` Aus `2`"f^{-1} Funktion",
aus `1`"f^{-1} streng M_antiton auf $f[E]$",
aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in f[E] \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p\,_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\,q$"
folgt via **320-10**: $f^{-1}(q)\,_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}\,f^{-1}(p)$.

□

322-7. Aus der strengen M_Isotonie/M_Antitonie von x auf E folgt $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

322-7(Satz)

a) *Aus "x streng M_isoton auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$".*

b) *Aus "x streng M_antiton auf E" folgt "$E \subseteq \mathsf{dom}\, x$".*

Beweis **322-7** a) VS gleich x streng M_isoton auf E.

1: Aus VS gleich "x streng M_isoton auf E"
folgt via **320-3(Def)**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf E.

2: Aus 1"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _isoton auf E"
folgt via **81-2**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

b) VS gleich x streng M_antiton auf E.

1: Aus VS gleich "x streng M_isoton auf E"
folgt via **320-3(Def)**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _antiton auf E.

2: Aus 1"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$ _antiton auf E"
folgt via **81-3**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, x$.

□

322-8. Aus **322-4,5** ergibt sich vorliegender Satz, der unter anderem bei der Umformung von $\leq$ _Termen hilfreich ist.

322-8(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "f injektiv" und "f streng M_isoton auf E" und "E ist M_Kette" und "M antiSymmetrisch" und "$p, q \in E$" und "$f(p)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f(q)$"*

folgt "$p_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}q$".

b) *Aus "f Funktion" und "f injektiv" und "f streng M_antiton auf E" und "E ist M_Kette" und "M antiSymmetrisch" und "$p, q \in E$" und "$f(p)_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}f(q)$"*

folgt "$q_{-} \overset{\mathbf{ir}}{M} {}_{-}p$".

<u>Beweis **322-8**</u> a) VS gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \wedge (f \text{ streng } M\_\text{isoton auf } E) \wedge (E \text{ ist } M\_\text{Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch}) \wedge (p, q \in E) \wedge (f(p){}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f(q)).$$

1.1: Aus VS gleich “$(f$ Funktion$) \wedge (f$ injektiv$) \wedge (f$ streng M_isoton auf $E)$
$\wedge(E$ ist M_Kette$) \wedge (M$ antiSymmetrisch$)$”
folgt via **322-4**: f^{-1} streng M_isoton auf $f[E]$.

1.2: Aus VS gleich “$\ldots f$ streng M_isoton auf $E \ldots$”
folgt via **322-7**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

1.3: Aus VS gleich “$\ldots f$ injektiv$\ldots$”
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

2.1: Aus VS gleich “f Funktion$\ldots$”,
aus VS gleich “$\ldots p \ldots \in E \ldots$” und
aus 1.2 “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-27**: $f(p) \in f[E]$.

2.2: Aus VS gleich “f Funktion$\ldots$”,
aus VS gleich “$\ldots q \in E \ldots$” und
aus 1.2 “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-27**: $f(q) \in f[E]$.

3: Aus 1.3 “f^{-1} Funktion”,
aus 1.1 “f^{-1} streng M_isoton auf $f[E]$”,
aus 2.1 “$f(p) \in f[E]$”,
aus 2.2 “$f(q) \in f[E]$” und
aus VS gleich “$\ldots f(p){}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f(q)$”
folgt via **320-9**: $f^{-1}(f(p)){}_{-}\overset{\mathbf{ir}}{M}{}_{-}f^{-1}(f(q))$.

4.1: Aus VS gleich “$\ldots p \ldots \in E \ldots$” und
aus 1.2 “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

4.2: Aus VS gleich “$\ldots q \in E \ldots$” und
aus 1.2 “$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **0-4**: $q \in \mathsf{dom}\, f$.

...

<u>Beweis **322-8**</u> `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$
$\wedge(f \text{ streng } M\text{\_isoton auf } E)$
$\wedge(E \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch})$
$\wedge(p, q \in E) \wedge (f(p)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(q))$.

...

`5.1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \ldots$" und
aus `4.1`"$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **19-5**: $p = f^{-1}(f(p))$.

`5.2:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \ldots$" und
aus `4.2`"$q \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **19-5**: $q = f^{-1}(f(q))$.

`6:` Aus `3`,
aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $p\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_q$.

<u>Beweis</u> **322-8** `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$
$\wedge(f \text{ streng } M\text{\_antiton auf } E)$
$\wedge(E \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch})$
$\wedge(p, q \in E) \wedge (f(p)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(q))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \wedge (f \text{ streng } M\text{\_antiton auf } E)$
$\wedge(E \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch})$"
folgt via **322-5**: f^{-1} streng M_antiton auf $f[E]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ streng M_antiton auf $E \ldots$"
folgt via **322-7**: $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ injektiv$\ldots$"
folgt via **19-1**: f^{-1} Funktion.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in E \ldots$" und
aus `1.2`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(p) \in f[E]$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots q \in E \ldots$" und
aus `1.2`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(q) \in f[E]$.

`3:` Aus `1.3`"f^{-1} Funktion",
aus `1.1`"f^{-1} streng M_antiton auf $f[E]$",
aus `2.1`"$f(p) \in f[E]$",
aus `2.2`"$f(q) \in f[E]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots f(p)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(q)$"
folgt via **320-10**: $f^{-1}(f(q))\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_f^{-1}(f(p))$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in E \ldots$" und
aus `1.2`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in E \ldots$" und
aus `1.2`"$E \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **0-4**: $q \in \mathsf{dom}\, f$.

$\ldots$

<u>Beweis **322-8**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv})$
$\wedge(f \text{ streng } M\text{\_antiton auf } E)$
$\wedge(E \text{ ist } M\text{\_Kette}) \wedge (M \text{ antiSymmetrisch})$
$\wedge(p, q \in E) \wedge (f(p)\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_f(q)).$

...

`5.1:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \ldots$" und
aus `4.1`"$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **19-5**: $p = f^{-1}(f(p)).$

`5.2:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ injektiv}) \ldots$" und
aus `4.2`"$q \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **19-5**: $q = f^{-1}(f(q)).$

`6:` Aus `3`,
aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $q\_\overset{\mathbf{ir}}{M}\_p.$

□

Analysis: Einiges über $x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$ und $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

Ersterstellung: 09/01/15 **Letzte Änderung: 16/01/15**

323-1. Aussage **322-6** nimmt im Spezialfall $M = \leq$ für streng $\leq$ _isotone Funktionen bestechend einfache Form an.

323-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ f *Funktion.*

$\rightarrow)$ f *injektiv.*

$\rightarrow)$ f *streng* $\leq$ *_isoton auf* $E \subseteq \mathbb{S}$.

$\rightarrow)$ $x, y \in f[E]$.

$\rightarrow)$ $x < y$.

Dann folgt "$f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$".

$\leq$-**Notation**.

Beweis **323-1**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

1.2: Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung auf $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow)$ "f injektiv",
aus $\rightarrow)$ "f streng $\leq$ _isoton auf $E \ldots$",
aus 1.1 "E ist $\leq$ _Kette",
aus 1.2 "$\leq$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow)$ "$x, y \in f[E]$" und
aus $\rightarrow)$ "$x < y$"
folgt via **322-6**: $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

$\square$

323-2. Aussage **322-6** nimmt im Spezialfall $M = \leq$ für streng $\leq$ _antitone Funktionen bestechend einfache Form an.

<u>323-2(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ *f Funktion.*

$\rightarrow)$ *f injektiv.*

$\rightarrow)$ *f streng $\leq$ _antiton auf $E \subseteq \mathbb{S}$.*

$\rightarrow)$ $x, y \in f[E]$.

$\rightarrow)$ $x < y$.

Dann folgt "$f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$".

<u>$\leq$-Notation</u>.

<u>Beweis **323-2**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow)$ "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`1.2:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung auf $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus $\rightarrow)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow)$ "f injektiv",
aus $\rightarrow)$ "f streng $\leq$ _antiton auf $E \ldots$",
aus `1.1` "E ist $\leq$ _Kette",
aus `1.2` "$\leq$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow)$ "$x, y \in f[E]$" und
aus $\rightarrow)$ "$x < y$"
folgt via **322-6**: $f^{-1}(y) < f^{-1}(x)$.

$\square$

323-3. Aussage **322-8** nimmt im Spezialfall $M = \leq$ für streng $\leq$ _isotone Funktionen bestechend einfache Form an.

<u>**323-3(Satz)**</u>

Es gelte:

→) f *Funktion.*

→) f *injektiv.*

→) f *streng* $\leq$ *_isoton auf* $E \subseteq \mathbb{S}$.

→) $x, y \in E$.

→) $f(x) < f(y)$.

Dann folgt "$x < y$".

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **323-3**</u>

`1.1:` Aus →) "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`1.2:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung auf $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus →) "f Funktion",
aus →) "f injektiv",
aus →) "f streng $\leq$ _isoton auf $E \ldots$",
aus `1.1` "E ist $\leq$ _Kette",
aus `1.2` "$\leq$ antiSymmetrisch",
aus →) "$x, y \in E$" und
aus →) "$f(x) < f(y)$"
folgt via **322-8**: $x < y$.

□

323-4. Aussage **322-8** nimmt im Spezialfall $M = \leq$ für streng $\leq$ _antitone Funktionen bestechend einfache Form an.

<u>**323-4(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

$\rightarrow\!)$ *f injektiv.*

$\rightarrow\!)$ *f streng $\leq$ _antiton auf $E \subseteq \mathbb{S}$.*

$\rightarrow\!)$ $x, y \in E$.

$\rightarrow\!)$ $f(x) < f(y)$.

Dann folgt "$y < x$".

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **323-4**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

`1.2:` Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung auf $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

`2:` Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "f injektiv",
aus $\rightarrow\!)$ "f streng $\leq$ _antiton auf $E \ldots$",
aus `1.1` "E ist $\leq$ _Kette",
aus `1.2` "$\leq$ antiSymmetrisch",
aus $\rightarrow\!)$ "$x, y \in E$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$f(y) < f(x)$"
folgt via **322-8**: $x < y$.

□

323-5. Aus $x \leq y$ folgt $0 \leq x \uparrow 2, y \uparrow 2$.

323-5(Satz)

a) *Aus* "$x \leq y$" *folgt* "$0 \leq x \uparrow 2, y \uparrow 2$".

b) *Aus* "$x < y$" *folgt* "$0 \leq x \uparrow 2, y \uparrow 2$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **323-5**</u> `a)` `VS` gleich $x \leq y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y$"
folgt via **107-3**: $x, y \in \mathbb{S}.$

`2.1:` Aus `1`"$x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \leq x \cdot x.$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \leq y \cdot y.$

`3.1:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x.$

`3.2:` Via **317-4** gilt: $y \uparrow 2 = y \cdot y.$

`4.1:` Aus `2.1` und
aus `3.1`
folgt: $\boxed{0 \leq x \uparrow 2}$

`4.2:` Aus `2.2` und
aus `3.2`
folgt: $\boxed{0 \leq y \uparrow 2}$

`b)` `VS` gleich $x < y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **41-3**: $x \leq y.$

`2:` Aus `1`"$x \leq y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq x \uparrow 2, y \uparrow 2.$

$\square$

323-6. Die Funktion $\uparrow 2$ auf $[0|+\infty]$ streng $\leq$ _isoton.

323-6(Satz)

$$\uparrow 2 \textit{ streng} \leq \textit{\_isoton auf } [0|+\infty].$$

Beweis **323-6**

$\leq$.RECH-**Notation**.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha, \beta \in [0|+\infty]) \wedge (\alpha < \beta)$.

2: Aus Thema1.1"$\alpha \ldots \in [0|+\infty] \ldots$"
folgt via **142-3**: $0 \leq \alpha$.

3: Aus 2"$0 \leq \alpha$" und
aus Thema1.1"$\ldots \alpha < \beta$"
folgt via **317-37**: $\alpha \uparrow 2 < \beta \uparrow 2$.

Ergo Thema1.1:

A1 | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in [0|+\infty]) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (\alpha \uparrow 2 < \beta \uparrow 2)$"

1.2: Via **142-4** gilt: $[0|+\infty] \subseteq \mathbb{S}$.

2: Aus 1.2"$[0|+\infty] \subseteq \mathbb{S}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-6**: $[0|+\infty] \subseteq \mathbb{A}$.

3: Aus 2"$[0|+\infty] \subseteq \mathbb{A}$" und
aus **317-4**"$\mathsf{dom}(\uparrow 2) = \mathbb{A}$"
folgt: $[0|+\infty] \subseteq \mathsf{dom}(\uparrow 2)$.

4: Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion",
aus 3"$[0|+\infty] \subseteq \mathsf{dom}(\uparrow 2)$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in [0|+\infty]) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (\alpha \uparrow 2 < \beta \uparrow 2)$"
folgt via **320-9**: $\uparrow 2$ streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$.

$\square$

323-7. Strenge Isotonie/Antitonie vererbt sich auf TeilKlassen. Ist eine Klasse x (streng) isoton/(streng) antiton auf E, so ist auch jede TeilKlasse - im Speziellen: jede Einschränkung - von x (streng) isoton/(streng) antiton auf E.

323-7(Satz)

a) *Aus "$y \subseteq x$ streng M_isoton auf E" folgt "y streng M_isoton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$".*

b) *Aus "$y \subseteq x$ streng M_antiton auf E" folgt "y streng M_antiton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$".*

c) *Aus "x streng M_isoton auf E" folgt "$(x \upharpoonright D)$ streng M_isoton auf $E \cap D$".*

d) *Aus "x streng M_antiton auf E" folgt "$(x \upharpoonright D)$ streng M_antiton auf $E \cap D$".*

e) *Aus "x ist M_isoton auf E" folgt "$(x \upharpoonright D)$ ist M_isoton auf $E \cap D$".*

f) *Aus "x ist M_antiton auf E" folgt "$(x \upharpoonright D)$ ist M_antiton auf $E \cap D$".*

Beweis **323-7** a) VS gleich $y \subseteq x$ streng M_isoton auf E.

1: Aus VS gleich "... x streng M_isoton auf E"
folgt via **320-3(Def)**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf E.

2: Aus VS gleich "$y \subseteq x$ ..." und
aus 1 "x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf E"
folgt via **81-5**: y ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$.

3: Aus 2 "y ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **320-3(Def)**: y streng M_isoton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$.

<u>Beweis **323-7**</u> `b)` `VS` gleich $y \subseteq x$ streng M_antiton auf E.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ streng M_antiton auf E"
folgt via **320-3(Def)**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf E.

`2:` Aus `VS` gleich "$y \subseteq x \ldots$" und
aus `1`"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf E"
folgt via **81-5**: y ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$.

`3:` Aus `2`"y ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **320-3(Def)**: y streng M_antiton auf $E \cap \mathsf{dom}\, y$.

`c)` `VS` gleich x streng M_isoton auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ streng M_isoton auf E"
folgt via **320-3(Def)**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf E.

`1.2:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D.

`2:` Aus `1.1`"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf E" und
aus `1.2`"$(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D"
folgt via **81-8**: $(x \downharpoonright D)$ ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf $E \cap D$.

`3:` Aus `2`"$(x \downharpoonright D)$ ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_isoton auf $E \cap D$"
folgt via **320-3(Def)**: $(x \downharpoonright D)$ streng M_isoton auf $E \cap D$.

`d)` `VS` gleich x streng M_antiton auf E.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ streng M_antiton auf E"
folgt via **320-3(Def)**: x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf E.

`1.2:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D.

`2:` Aus `1.1`"x ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf E" und
aus `1.2`"$(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D"
folgt via **81-8**: $(x \downharpoonright D)$ ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf $E \cap D$.

`3:` Aus `2`"$(x \downharpoonright D)$ ist $\overset{\mathbf{ir}}{M}$_antiton auf $E \cap D$"
folgt via **320-3(Def)**: $(x \downharpoonright D)$ streng M_antiton auf $E \cap D$.

<u>Beweis</u> **323-7** `e)` `VS` gleich x ist M_isoton auf E.

`1:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist M_isoton auf E" und
aus `1` "$(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D"
folgt via **81-8**: $(x \downharpoonright D)$ ist M_isoton auf $E \cap D$.

`f)` `VS` gleich x ist M_antiton auf E.

`1:` Via **258-11** gilt: $(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D.

`2:` Aus `VS` gleich "x ist M_antiton auf E" und
aus `1` "$(x \downharpoonright D)$ Einschränkung von x auf D"
folgt via **81-8**: $(x \downharpoonright D)$ ist M_antiton auf $E \cap D$.

$\square$

323-8. qudr ist injektiv und streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$.

323-8(Satz)

a) qudr *injektiv.*

b) qudr *streng* $\leq$ *_isoton auf* $[0|+\infty]$.

Beweis **323-8**

1.1: Aus **317-13**"$\uparrow 2$ injektiv auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **299-6**: $(\uparrow 2 \restriction \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty])$ injektiv.

1.2: Aus **323-6**"$\uparrow 2$ streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$"
folgt via **323-7**:
$(\uparrow 2 \restriction \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty])$ streng $\leq$ _isoton auf
$([0|+\infty]) \cap (\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty])$.

2: $$([0|+\infty]) \cap (\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]) \overset{\mathbf{KG}\cup}{=} ([0|+\infty]) \cap ([0|+\infty] \cup \{\mathsf{nan}\}) \overset{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} [0|+\infty].$$

3: Aus 1.2 und
aus 2"$([0|+\infty]) \cap (\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]) = \ldots = [0|+\infty]$"
folgt: $(\uparrow 2 \restriction \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty])$ streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$.

4.a): Aus 1.1 und
aus **318-2(Def)**"$\mathsf{qudr} = (\uparrow 2 \restriction \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty])$"
folgt: qudr injektiv.

4.b): Aus 3 und
aus **318-2(Def)**"$\mathsf{qudr} = (\uparrow 2 \restriction \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty])$"
folgt: qudr streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$.

$\square$

323-9. Unter anderem gilt $|x| = \mathcal{U}$ genau dann, wenn $x \notin \mathbb{A}$.

<u>**323-9(Satz)**</u>

a) *"$x \uparrow 2 = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "$|x| = \mathcal{U}$"*
genau dann, wenn "$x \notin \mathbb{A}$".

b) $\mathcal{U} \uparrow 2 = \mathcal{U}$.

c) $\mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

d) $|\mathsf{nan}| = \mathsf{nan}$.

e) $1 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

f) $|1| = 1$.

g) $|\mathsf{i}| = 1$.

h) $|\mathsf{i} \cdot x| = |x|$.

i) $|\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}| = \mathsf{nan}$.

j) $(\mathsf{i} \cdot x) \uparrow 2 = -(x \uparrow 2)$.

k) $(\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \uparrow 2 = \mathsf{nan}$.

<u>RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **323-9**</u> a) $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \uparrow 2 = \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$x \uparrow 2 = \mathcal{U}$"
folgt via **17-4**: $x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$.

2: Aus 1"$x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$" und
aus **317-4**"$\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

3: Aus 2"$x \notin \mathbb{A}$" und
aus **321-6**"$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,|.|$.

4: Aus 3"$x \notin \mathsf{dom}\,|.|$"
folgt via **17-4**: $|x| = \mathcal{U}$.

Beweis **323-9** `a)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $|x| = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$|x| = \mathcal{U}$"
folgt via **17-4**: $x \notin \mathsf{dom}\,|.|$.

`2:` Aus `1`"$x \notin \mathsf{dom}\,|.|$" und
aus **321-6**"$\mathsf{dom}\,|.| = \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

`a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \notin \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{A}$" und
aus **317-4**"$\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$"
folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$.

`2:` Aus `1`"$x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$"
folgt via **17-4**: $x \uparrow 2 = \mathcal{U}$.

`b)`

`1:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathcal{U} \uparrow 2 = \mathcal{U}$.

`cd)`

`1.c):` Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$" und
aus **101-7**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{B}$"
folgt via **5-3**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$.

`2.d):` Aus `1.c)`"$\mathsf{nan} \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$"
folgt via **321-28**: $|\mathsf{nan}| = \mathsf{nan}$.

`ef)`

`1.e):` Aus **≤schola**"$0 \leq 1$"
folgt via **317-8**: $1 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.1:` Aus `1.f)`"$1 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-20**: $1 = |1|$.

`3.f):` Aus `2.1`
folgt: $|1| = 1$.

Beweis **323-9** `g)`

$$|\mathsf{i}| \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(\mathsf{i})} \stackrel{\mathbf{99-16}}{=} \sqrt{1} \stackrel{\mathbf{318-7}}{=} 1.$$

`h)`

$$|\mathsf{i}\cdot x| \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(\mathsf{i}\cdot x)} \stackrel{\mathbf{133-1}}{=} \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \stackrel{\mathbf{321-6}}{=} |x|.$$

`i)`

$$|\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}| \stackrel{\mathtt{h)}}{=} |\mathsf{nan}| \stackrel{\mathtt{d)}}{=} \mathsf{nan}.$$

`j)`

$$(\mathsf{i}\cdot x)\uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\mathsf{i}\cdot x)\cdot(\mathsf{i}\cdot x) \stackrel{\mathbf{133-2}}{=} -x\cdot x \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} -(x\uparrow 2).$$

`k)`

$$(\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})\uparrow 2 \stackrel{\mathtt{j)}}{=} -\mathsf{nan}\uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-14}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}.$$

□

323-10. Die Gleichung $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$ gilt unter anderem genau dann, wenn x keine Zahl ist oder wenn $x \in \mathbb{T}$.

323-10(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`ii)` $x \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2$.

`iii)` $(-x) \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`iv)` $(-x) \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2$.

`v)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S})$.

`vi)` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **323-10**

$\leq$-**Notation**.

...

<u>Beweis **323-10**</u>...

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2.$

`1:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|.$

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $x \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

`1.1:` Via **317-14** gilt: $(-x) \uparrow 2 = x \uparrow 2.$

`1.2:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|.$

`2:` Aus `VS`,
aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(-x) \uparrow 2 = |x| \uparrow 2.$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(-x) \uparrow 2 = |x| \uparrow 2.$

`1:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|.$

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $(-x) \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

<u>Beweis **323-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(-x) \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **100-6**: $-x$ Zahl.

`3:` Aus 2“$-x$ Zahl”
folgt via **321-8**: $|-x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`4:` Aus 3“$|-x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus **317-11**“$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **0-4**: $|-x| \in \mathbb{T}.$

`5:` Aus 4“$|-x| \in \mathbb{T}$”
folgt via **321-3**: $|-x| \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`6:` Aus `VS` und
aus 5
folgt: $(-x) \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`7:` Via **317-14** gilt: $(-x) \uparrow 2 = x \uparrow 2.$

`8:` Aus 6 und 7
folgt: $x \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`9:` Aus 8“$x \uparrow 2 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **317-8**: $(0 \leq x \uparrow 2) \vee (x \uparrow 2 = \mathsf{nan}).$

`Fallunterscheidung`

`9.1.Fall` $0 \leq x \uparrow 2.$

`10:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x.$

`11:` Aus 10 und
aus `9.1.Fall`
folgt: $0 \leq x \cdot x.$

`12:` Aus 11“$0 \leq x \cdot x$”
folgt via **127-8**: $x \in \mathbb{S}.$

`9.2.Fall` $x \uparrow 2 = \mathsf{nan}.$

Aus `9.2.Fall`“$x \uparrow 2 = \mathsf{nan}$”
folgt via **319-3**: $(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S}).$

...

<u>Beweis **323-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich $(-x) \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S}).$$

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S}).$

1: Aus VS folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S}).$

2: Via **95-16** gilt: $(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((x = \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S})).$

3: Aus 1 und aus 2 folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{T}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{T}).$

1: Via **95-16** gilt: $(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow ((x = \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S})).$

2: Aus VS und aus 1 folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{S}).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}.$

3.1: Aus 2.1.Fall "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **323-9**: $x \uparrow 2 = \mathcal{U}.$

3.2: Aus 2.1.Fall "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **323-9**: $|x| = \mathcal{U}.$

4: $x \uparrow 2 \stackrel{3.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{323-9}}{=} \mathcal{U} \uparrow 2 \stackrel{3.2}{=} |x| \uparrow 2.$

...

<u>Beweis **323-10**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $x = \mathsf{nan}$.

$$x \uparrow 2 \stackrel{\texttt{2.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{323-9}}{=} |\mathsf{nan}| \uparrow 2 \stackrel{\texttt{2.2.Fall}}{=} |x| \uparrow 2.$$

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

$$x \uparrow 2 \stackrel{\texttt{2.3.Fall}}{=} (\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{323-9}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} \mathsf{nan} \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{323-9}}{=} |\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}| \uparrow 2 \stackrel{\texttt{2.3.Fall}}{=} |x| \uparrow 2.$$

...

Beweis **323-10** $\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (x \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $x \in \mathbb{S}$.

1: Aus `0.4.Fall` “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-18**: $(x \leq 0) \vee (0 \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \leq 0$.

2: Aus `1.1.Fall` “$x \leq 0$”
folgt via **321-13**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$.

3: Aus 2 “$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [-\infty|0]$ ”
folgt via **321-22**: $-x = |x|$.

4: $x \uparrow 2 \overset{\mathbf{317\text{-}14}}{=} (-x) \uparrow 2 \overset{3}{=} |x| \uparrow 2$.

`1.2.Fall` $0 \leq x$.

2: Aus `1.2.Fall` “$0 \leq x$”
folgt via **317-8**: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

3: Aus 2 “$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$ ”
folgt via **321-20**: $x = |x|$.

4: Aus 4
folgt: $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

□

323-11. Hier wird Einiges über $\leq$ _Terme mit Beträgen und Quadraten bewiesen.

323-11(Satz)

a) *Aus* "$|x| \leq |y|$" *folgt* "$0 \leq |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$".

b) *Aus* "$|x| < |y|$" *folgt* "$0 \leq |x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$".

c) *Aus* "$0 \leq x \leq y$" *folgt* "$0 \leq |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$".

d) *Aus* "$0 < x \leq y$" *folgt* "$0 < |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$".

e) *Aus* "$0 \leq x < y$" *folgt* "$0 \leq |x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$".

f) *Aus* "$0 < x < y$" *folgt* "$0 < |x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-11** a) VS gleich $|x| \leq |y|$.

1: Aus VS gleich "$|x| \leq |y|$"
folgt via **107-3**: $|x| \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$|x| \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-28**: $0 \leq |x| \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2"$0 \leq |x| \ldots$" und
aus VS gleich "$|x| \leq |y|$"
folgt via **317-37**: $0 \leq |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$.

b) VS gleich $|x| < |y|$.

1: Aus VS gleich "$|x| < |y|$"
folgt via **107-9**: $|x| \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1"$|x| \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-28**: $0 \leq |x| \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2"$0 \leq |x| \ldots$" und
aus VS gleich "$|x| < |y|$"
folgt via **317-37**: $0 \leq |x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$.

<u>Beweis **323-11**</u> `c)` `VS` gleich $0 \leq x \leq y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **107-3**: $x, y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \leq y$"
folgt via **317-37**: $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-10**: $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-10**: $y \uparrow 2 = |y| \uparrow 2$.

`3:` Aus `1.2`,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 \leq |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$.

`d)` `VS` gleich $0 < x \leq y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **107-3**: $x, y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \leq y$"
folgt via **317-37**: $0 < x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-10**: $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-10**: $y \uparrow 2 = |y| \uparrow 2$.

`3:` Aus `1.2`,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 < |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$.

<u>Beweis **323-11**</u> `e)` `VS` gleich $0 < x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via **107-9**: $x, y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x < y$"
folgt via **317-37**: $0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-10**: $x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-10**: $y \uparrow 2 = |y| \uparrow 2$.

`3:` Aus `1.2`,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $0 < |x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$.

□

323-12. Es gilt $0 \le x \le y$ genau dann, wenn $-y \le -x \le 0$.

323-12(Satz)

a) *“$0 \le x \le y$” genau dann, wenn “$-y \le -x \le 0$”.*

b) *“$0 < x \le y$” genau dann, wenn “$-y \le -x < 0$”.*

c) *“$0 \le x < y$” genau dann, wenn “$-y < -x \le 0$”.*

d) *“$0 < x < y$” genau dann, wenn “$-y < -x < 0$”.*

e) *“$x \le y \le 0$” genau dann, wenn “$0 \le -y \le -x$”.*

f) *“$x < y \le 0$” genau dann, wenn “$0 \le -y < -x$”.*

g) *“$x \le y < 0$” genau dann, wenn “$0 < -y \le -x$”.*

h) *“$x < y < 0$” genau dann, wenn “$0 < -y < -x$”.*

$\le$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-12** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 \le x \le y$.

1.1: Aus VS gleich “$0 \le x \dots$”

folgt via **109-16**: $\boxed{-x \le 0}$

1.2: Aus VS gleich “$\dots x \le y$”

folgt via **109-15**: $\boxed{-y \le -x}$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $-y \le -x \le 0$.

1.1: Aus VS gleich “$-y \le -x \dots$”

folgt via **109-15**: $\boxed{x \le y}$

1.2: Aus VS gleich “$\dots -x \le 0$”

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le x}$

<u>Beweis **323-12**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 < x \le y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \le y$"

folgt via **109-15**: $\boxed{-y \le -x}$

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-y \le -x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y \le -x \ldots$"

folgt via **109-15**: $\boxed{x \le y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < x}$

`c)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 \le x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"

folgt via **109-14**: $\boxed{-y < -x}$

`c)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $-y < -x \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y < -x \ldots$"

folgt via **109-14**: $\boxed{x < y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x \le 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le x}$

<u>Beweis **323-12**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 < x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"

folgt via **109-14**: $\boxed{-y < -x}$

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-y < -x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y < -x \ldots$"

folgt via **109-14**: $\boxed{x < y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -x < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < x}$

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \le y \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \le y \ldots$"

folgt via **109-15**: $\boxed{-y \le -x}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \le 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le -y}$

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \le -y \le -x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le -y \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{y \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -y \le -x$"

folgt via **109-15**: $\boxed{x \le y}$

<u>Beweis</u> **323-12** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x < y \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"

folgt via **109-14**: $\boxed{-y < -x}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \le 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le -y}$

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 \le -y < -x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le -y \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{y \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - y < -x$"

folgt via **109-14**: $\boxed{x < y}$

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \le y < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \le y \ldots$"

folgt via **109-15**: $\boxed{-y \le -x}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < -y}$

`g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 < -y \le -x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < -y \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{y < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - y \le -x$"

folgt via **109-15**: $\boxed{x \le y}$

<u>Beweis **323-12**</u> `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x < y < 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"

folgt via **109-14**: $\boxed{-y < -x}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < -y}$

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $0 < -y < -x.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < -y \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{y < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - y < -x$"

folgt via **109-14**: $\boxed{x < y}$

$\square$

323-13. Es gilt $0 \leq -x \leq y$ genau dann, wenn $-y \leq x \leq 0$.

323-13(Satz)

a) *"$0 \leq -x \leq y$" genau dann, wenn "$-y \leq x \leq 0$".*

b) *"$0 < -x \leq y$" genau dann, wenn "$-y \leq x < 0$".*

c) *"$0 \leq -x < y$" genau dann, wenn "$-y < x \leq 0$".*

d) *"$0 < -x < y$" genau dann, wenn "$-y < x < 0$".*

e) *"$0 \leq x \leq -y$" genau dann, wenn "$y \leq -x \leq 0$".*

f) *"$0 < x \leq -y$" genau dann, wenn "$y \leq -x < 0$".*

g) *"$0 \leq x < -y$" genau dann, wenn "$y < -x \leq 0$".*

h) *"$0 < x < -y$" genau dann, wenn "$y < -x < 0$".*

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-13** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 \leq -x \leq y$.

1.1: Aus VS gleich "$0 \leq -x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{x \leq 0}$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots -x \leq y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-y \leq x}$

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $-y \leq x \leq 0$.

1.1: Aus VS gleich "$-y \leq x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-x \leq y}$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots x \leq 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \leq -x}$

<u>Beweis **323-13**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 < -x \le y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < -x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x \le y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-y \le x}$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-y \le x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y \le x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-x \le y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < -x}$

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \le -x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le -x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{x \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x < y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-y < x}$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-y < x \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y < x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-x < y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \le 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le -x}$

<u>Beweis **323-13**</u> `d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 < -x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < -x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -x < y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-y < x}$

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $-y < x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y < x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{-x < y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < -x}$

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \le x \le -y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \le -y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{y \le -x}$

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y \le -x \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \le -x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{x \le -y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -x \le 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le x}$

<u>Beweis **323-13**</u> `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 < x \le -y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \le -y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{y \le -x}$

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y \le -x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \le -x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{x \le -y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < x}$

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $0 \le x < -y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < -y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{y < -x}$

`g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $y < -x \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y < -x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{x < -y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x \le 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 \le x}$

<u>Beweis</u> **323-13** `h)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $0 < x < -y.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"

folgt via **109-16**: $\boxed{-x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < -y$"

folgt via **165-1**: $\boxed{y < -x}$

`h)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $y < -x < 0.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y < -x \ldots$"

folgt via **165-1**: $\boxed{x < -y}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -x < 0$"

folgt via **109-16**: $\boxed{0 < x}$

□

323-14. Hier wird Weiteres über $\leq$ _Terme mit Beträgen und Quadraten bewiesen.

323-14(Satz)

a) *Aus* “$x \leq y \leq 0$” *folgt* “$0 \leq |y| \uparrow 2 \leq |x| \uparrow 2$”.

b) *Aus* “$x < y \leq 0$” *folgt* “$0 \leq |y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2$”.

c) *Aus* “$x \leq y < 0$” *folgt* “$0 < |y| \uparrow 2 \leq |x| \uparrow 2$”.

d) *Aus* “$x < y < 0$” *folgt* “$0 < |y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2$”.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-14** a) VS gleich $x \leq y \leq 0$.

1: Aus VS gleich “$x \leq y \leq 0$”
folgt via **323-12**: $0 \leq -y \leq -x$.

2: Aus 1“$0 \leq -y \leq -x$”
folgt via **323-11**: $0 \leq |-y| \uparrow 2 \leq |-x| \uparrow 2$.

3.1: Via **321-8** gilt: $|x| \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2$.

3.2: Via **321-8** gilt: $|y| \uparrow 2 = |-y| \uparrow 2$.

4: Aus 2,
aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $0 \leq |y| \uparrow 2 \leq |x| \uparrow 2$.

<u>Beweis</u> **323-14** `b)` `VS` gleich $x < y \le 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \le 0$"
folgt via **323-12**: $0 \le -y < -x.$

`2:` Aus `1`"$0 \le -y < -x$"
folgt via **323-11**: $0 \le |-y| \uparrow 2 < |-x| \uparrow 2.$

`3.1:` Via **321-8** gilt: $|x| \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

`3.2:` Via **321-8** gilt: $|y| \uparrow 2 = |-y| \uparrow 2.$

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $0 \le |y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2.$

`c)` `VS` gleich $x \le y < 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \le y < 0$"
folgt via **323-12**: $0 < -y \le -x.$

`2:` Aus `1`"$0 < -y \le -x$"
folgt via **323-11**: $0 < |-y| \uparrow 2 \le |-x| \uparrow 2.$

`3.1:` Via **321-8** gilt: $|x| \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

`3.2:` Via **321-8** gilt: $|y| \uparrow 2 = |-y| \uparrow 2.$

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $0 < |y| \uparrow 2 \le |x| \uparrow 2.$

`d)` `VS` gleich $x < y < 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y < 0$"
folgt via **323-12**: $0 < -y < -x.$

`2:` Aus `1`"$0 < -y < -x$"
folgt via **323-11**: $0 < |-y| \uparrow 2 < |-x| \uparrow 2.$

`3.1:` Via **321-8** gilt: $|x| \uparrow 2 = |-x| \uparrow 2.$

`3.2:` Via **321-8** gilt: $|y| \uparrow 2 = |-y| \uparrow 2.$

`4:` Aus `2`,
aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $0 < |y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2.$

$\square$

323-15. Es gilt $0 \le x \uparrow 2$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{S}$.

323-15(Satz)

a) *"$0 \le x \uparrow 2$" genau dann, wenn "$x \in \mathbb{S}$".*

b) *Aus "$0 \le x \uparrow 2 \le y \uparrow 2$" folgt "$x, y \in \mathbb{S}$"*
und "$x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2$"
und "$y \uparrow 2 = |y| \uparrow 2$"
und "$x \uparrow 2 \le |y| \uparrow 2$"
und "$|x| \uparrow 2 \le y \uparrow 2$"
und "$|x| \uparrow 2 \le |y| \uparrow 2$".

$\le$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-15** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $0 \le x \uparrow 2$.

1: Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

2: Aus VS und
aus 1
folgt: $0 \le x \cdot x$.

3: Aus 2"$0 \le x \cdot x$"
folgt via **127-8**: $x \in \mathbb{S}$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x \in \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \le x \cdot x$.

2: Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $0 \le x \uparrow 2$.

<u>Beweis **323-15**</u> `b)` `VS` gleich $0 \le x \uparrow 2 \le y \uparrow 2.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \uparrow 2 \ldots$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{x \in \mathbb{S}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \uparrow 2 \le y \uparrow 2$"
folgt via **107-8**: $0 \le y \uparrow 2.$

`2.1:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"

folgt via **323-10**: $\boxed{x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2}$

`2.2:` Aus `1.2`"$0 \le y \uparrow 2$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{y \in \mathbb{S}}$

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 \le y \uparrow 2$" und
aus `2.1`

folgt: $\boxed{|x| \uparrow 2 \le y \uparrow 2}$

`3.2:` Aus `2.2`"$y \in \mathbb{S}$"

folgt via **323-10**: $\boxed{y \uparrow 2 = |y| \uparrow 2}$

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 \le y \uparrow 2$" und
aus `3.2`

folgt: $\boxed{x \uparrow 2 \le |y| \uparrow 2}$

`4.2:` Aus `3.1` und
aus `3.2`

folgt: $\boxed{|x| \uparrow 2 \le |y| \uparrow 2}$

$\square$

323-16. Nun geht es - unter Zusatzvoraussetzungen - um Schlussfolgerungen aus $x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

323-16(Satz)

a) *Aus* "$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$" *folgt* "$0 \leq |x| \leq |y|$".

b) *Aus* "$0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2$" *folgt* "$0 \leq |x| < |y|$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$" *folgt* "$x, y \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \leq |x| \leq |y|$".

d) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$x \uparrow 2 < y \uparrow 2$" *folgt* "$x, y \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \leq |x| < |y|$".

e) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$" *folgt* "$x, y \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \leq |x| \leq |y|$".

f) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$x \uparrow 2 < y \uparrow 2$" *folgt* "$x, y \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \leq |x| < |y|$".

g) *Aus* "$0 \leq x, y$" *und* "$x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$" *folgt* "$x \leq y$".

h) *Aus* "$0 \leq x, y$" *und* "$x \uparrow 2 < y \uparrow 2$" *folgt* "$x < y$".

i) *Aus* "$x, y \leq 0$" *und* "$x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$" *folgt* "$y \leq x$".

j) *Aus* "$x, y \leq 0$" *und* "$x \uparrow 2 < y \uparrow 2$" *folgt* "$y < x$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **323-16**</u> `VS` gleich $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"
folgt via **323-15**: $(x, y \in \mathbb{S}) \wedge (|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2).$

`2.1:` Aus `1`"$x, y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\vee$**SZ**: $x, y \in \mathbb{B}.$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$"
folgt via **107-13**: $\neg(|y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2).$

`3:` Aus `2.1`"$x, y \in \mathbb{B}$"
folgt via **321-28**: $0 \leq |x|, |y| \in \mathbb{S}.$

`4.1:` Aus `3`

folgt: $\boxed{0 \leq |x|}$

`4.2:` Aus `3`"$|x|, |y| \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(|x| \leq |y|) \vee (|y| < |x|).$

`Fallunterscheidung`

`4.2.1.Fall` $|x| \leq |y|.$

`4.2.2.Fall` $|y| < |x|.$

`6:` Aus `4.2.2.Fall`"$|y| < |x|$"
folgt via **323-11**: $|y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2.$

`7:` Via `2.2` gilt: $\neg(|y| \uparrow 2 < |x| \uparrow 2).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{|x| \leq |y|}$

<u>Beweis **323-16**</u> `b)` `VS` gleich $0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2.$

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \uparrow 2 \dots$" und
aus `1`
folgt: $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2.$

`3:` Aus `2`"$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq |x| \leq |y|.$

`4.1:` Aus `3`
folgt: $\boxed{0 \leq |x|}$

`4.2:` Aus `3`"$\dots |x| \leq |y|$"
folgt via **41-5**: $(|x| < |y|) \vee (|x| = |y|).$

`Fallunterscheidung`

`4.2.1.Fall` $|x| < |y|.$

`4.2.2.Fall` $|x| = |y|.$

`5:` Aus `4.2.2.Fall`
folgt: $|x| \uparrow 2 = |y| \uparrow 2.$

`6:` Aus `3`"$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"
folgt via **323-15**: $(x \uparrow 2 = |x| \uparrow 2) \wedge (y \uparrow 2 = |y| \uparrow 2).$

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $x \uparrow 2 = y \uparrow 2.$

`8:` Aus `VS` gleich "$\dots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $x \uparrow 2 \neq y \uparrow 2.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{|x| < |y|}$

<u>Beweis **323-16**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{x \in \mathbb{S}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **323-15**: $0 \leq x \uparrow 2$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"
folgt: $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`3.1:` Aus 2"$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"

folgt via **323-15**: $\boxed{y \in \mathbb{S}}$

`3.2:` Aus 2"$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{0 \leq |x| \leq |y|}$

<u>Beweis **323-16**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (x \uparrow 2 < y \uparrow 2)$.

`1.1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{x \in \mathbb{S}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **323-15**: $0 \leq x \uparrow 2$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`2.1:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt: $0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2$.

`3.1:` Aus `2.1`"$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$"

folgt via **323-15**: $\boxed{y \in \mathbb{S}}$

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{0 \leq |x| < |y|}$

<u>Beweis **323-16**</u> `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{S}$.

Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{S}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(x, y \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq |x| \leq |y|)$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` $x \uparrow 2 \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \uparrow 2 \stackrel{\textbf{317-14}}{=} \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$”
folgt: $\mathsf{nan} \leq y \uparrow 2$.

`4:` Via **317-41** gilt: $\neg(\mathsf{nan} \leq y \uparrow 2)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x, y \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq |x| \leq |y|)$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \uparrow 2 < y \uparrow 2)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$”
folgt via **41-3**: $x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `1`“$x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$x \in \mathbb{S}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(x, y \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq |x| < |y|)$.

<u>Beweis **323-16**</u> `g)` `VS` gleich $(0 \le x, y) \wedge (x \uparrow 2 \le y \uparrow 2)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 \le x, y \ldots$”
folgt via **317-8**: $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 \le x \ldots$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **321-20**: $(x = |x|) \wedge (y = |y|)$.

`2.2:` Aus `1.2`“$x \in \mathbb{S}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 \le y \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $|x| \le |y|$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $x \le y$.

`h)` `VS` gleich $(0 \le x, y) \wedge (x \uparrow 2 < y \uparrow 2)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 \le x, y \ldots$”
folgt via **317-8**: $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 \le x \ldots$”
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **321-20**: $(x = |x|) \wedge (y = |y|)$.

`2.2:` Aus `1.2`“$x \in \mathbb{S}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $|x| < |y|$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $x < y$.

<u>Beweis **323-16**</u> `i)` `VS` gleich $(x, y \leq 0) \wedge (x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x, y \leq 0$”
folgt via **109-16**: $0 \leq -x, -y$.

`2.1:` Via **317-14** gilt: $x \uparrow 2 = (-x) \uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-14** gilt: $y \uparrow 2 = (-y) \uparrow 2$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$”,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(-x) \uparrow 2 \leq (-y) \uparrow 2$.

`4:` Aus `1`“$0 \leq -x, -y$” und
aus `3`“$(-x) \uparrow 2 \leq (-y) \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $-x \leq -y$.

`5:` Aus `4`“$-x \leq -y$”
folgt via **109-15**: $y \leq x$.

`j)` `VS` gleich $(x, y \leq 0) \wedge (x \uparrow 2 < y \uparrow 2)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x, y \leq 0$”
folgt via **109-16**: $0 \leq -x, -y$.

`2.1:` Via **317-14** gilt: $x \uparrow 2 = (-x) \uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-14** gilt: $y \uparrow 2 = (-y) \uparrow 2$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$”,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(-x) \uparrow 2 < (-y) \uparrow 2$.

`4:` Aus `1`“$0 \leq -x, -y$” und
aus `3`“$(-x) \uparrow 2 < (-y) \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $-x < -y$.

`5:` Aus `4`“$-x < -y$”
folgt via **109-14**: $y < x$.

$\square$

323-17. Aus $\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,x$ folgt $\mathsf{dom}\,(x \circ x) = \mathsf{dom}\,x$.

323-17(Satz)

a) $\mathsf{dom}\,(x \circ x) = x^{-1}[\mathsf{dom}\,x]$

b) $\mathsf{dom}\,(x \circ x) \subseteq \mathsf{dom}\,x$.

d) *Aus* "$\mathsf{ran}\,x \subseteq \mathsf{dom}\,x$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x \circ x) = \mathsf{dom}\,x$".

d) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x = \mathsf{ran}\,x$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x \circ x) = \mathsf{dom}\,x$".

e) $\mathsf{ran}\,(x \circ x) = x[\mathsf{ran}\,x]$.

f) $\mathsf{ran}\,(x \circ x) \subseteq \mathsf{ran}\,x$.

g) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x \subseteq \mathsf{ran}\,x$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(x \circ x) = \mathsf{ran}\,x$".

h) *Aus* "$\mathsf{dom}\,x = \mathsf{ran}\,x$" *folgt* "$\mathsf{ran}\,(x \circ x) = \mathsf{ran}\,x$".

Beweis **323-17** `a)`
Via **14-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(x\circ x)=x^{-1}[\mathsf{dom}\,x]$.

`b)`
Via **14-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(x\circ x)\subseteq\mathsf{dom}\,x$.

`c)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\,x\subseteq\mathsf{dom}\,x$.
Aus `VS` gleich "$\mathsf{ran}\,x\subseteq\mathsf{dom}\,x$"
folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(x\circ x)=\mathsf{dom}\,x$.

`d)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\,x=\mathsf{ran}\,x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,x=\mathsf{ran}\,x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,x\subseteq\mathsf{dom}\,x$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ran}\,x\subseteq\mathsf{dom}\,x$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{dom}\,(x\circ x)=\mathsf{dom}\,x$.

`e)`
Via **14-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(x\circ x)=x[\mathsf{ran}\,x]$.

`f)`
Via **14-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(x\circ x)\subseteq\mathsf{ran}\,x$.

`g)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\,x\subseteq\mathsf{ran}\,x$.
aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,x\subseteq\mathsf{ran}\,x$"
folgt via **14-6**: $\mathsf{ran}\,(x\circ x)=\mathsf{ran}\,x$.

`h)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\,x=\mathsf{ran}\,x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{dom}\,x=\mathsf{ran}\,x$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{dom}\,x\subseteq\mathsf{ran}\,x$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{dom}\,x\subseteq\mathsf{ran}\,x$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\mathsf{ran}\,(x\circ x)=\mathsf{ran}\,x$.

□

323-18. Aus $f : D \to B$ mit $B \subseteq D$ folgt $f \circ f : D \to B$.

323-18(Satz)

a) *Aus "f Funktion" folgt "$f \circ f$ Funktion" und "$(f \circ f)(x) = f(f(x))$".*

b) *Aus "$f : D \to B$" und "$B \subseteq D$" folgt "$f \circ f : D \to B$".*

c) *Aus "$f : D \to D$" folgt "$f \circ f : D \to D$".*

Beweis **323-18** `a)` `VS` gleich f Funktion.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `VS` gleich "f Funktion"

folgt via **18-46**: $\boxed{f \circ f \text{ Funktion}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion" und
aus `VS` gleich "f Funktion"

folgt via **18-46**: $\boxed{(f \circ f)(x) = f(f(x))}$

<u>Beweis **323-18**</u> `b)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (B \subseteq D)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`2.1:` Aus `1`"f Funktion..."
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f \circ f$ Funktion.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus `VS` gleich "$\ldots B \subseteq D$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq D$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
folgt: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **323-17**: $\mathsf{dom}\,(f \circ f) = \mathsf{dom}\, f$.

`5.1:` Aus `4` und
aus `1`"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(f \circ f) = D$.

`5.2:` Via **323-17** gilt: $\mathsf{ran}\,(f \circ f) \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

`6:` Aus `5.2`"$\mathsf{ran}\,(f \circ f) \subseteq \mathsf{ran}\, f$" und
aus `1`"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(f \circ f) \subseteq B$.

`7:` Aus `2.1`"$f \circ f$ Funktion",
aus `5.1`"$\mathsf{dom}\,(f \circ f) = D$" und
aus `6`"$\mathsf{ran}\,(f \circ f) \subseteq B$"
folgt via **21-1(Def)**: $f \circ f : D \to B$.

`c)` `VS` gleich $f : D \to D$.

`1:` Via **0-6** gilt: $D \subseteq D$.

`2:` Aus `VS` gleich "$f : D \to D$" und
aus `1`"$D \subseteq D$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f \circ f : D \to D$.

□

323-19. Es gilt $||x|| = |x|$.

323-19(Satz)

a) $|.| \circ |.| : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

b) $||x|| = |x|$.

Beweis **323-19** a)
Aus **321-6** "$|.| : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **318-3** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **323-18**: $|.| \circ |.| : \mathbb{A} \to \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

b)

1: Via **321-8** gilt: $(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U})$.

2: Aus 1 "$(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U})$"
folgt via **321-20**: $|x| = ||x||$.

3: Aus 2
folgt: $||x|| = |x|$.

□

323-20. Aus $|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$ folgt $0 \leq |x| \leq |y|$.

323-20(Satz)

a) *Aus* “$|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$” *folgt* “$x, y \in \mathbb{B}$” *und* “$0 \leq |x| \leq |y|$”.

b) *Aus* “$|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$” *folgt* “$x, y \in \mathbb{B}$” *und* “$0 \leq |x| < |y|$”.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-20** `a) VS` gleich $|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2.$

`1.1:` Via **321-8** gilt: $(|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (|x| = \mathcal{U}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

Aus `1.1.1.Fall` "$|x| \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-25**: $|x| \in \mathbb{T}.$

`1.1.2.Fall` $|x| = \mathcal{U}.$

`2:` Aus `1.1.2.Fall` "$|x| = \mathcal{U}$"
folgt: $|x| \uparrow 2 = \mathcal{U} \uparrow 2.$

`3:` Aus `2` und
aus **323-9** "$\mathcal{U} \uparrow 2 = \mathcal{U}$"
folgt: $|x| \uparrow 2 = \mathcal{U}.$

`4:` Aus `3` und
aus `VS`
folgt: $\mathcal{U} \leq |y| \uparrow 2.$

`5:` Via **317-22** gilt: $\neg(\mathcal{U} \leq |y| \uparrow 2).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` "$|x| \in \mathbb{T}$"

`1.2:` Aus `5` "$|x| \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$"
folgt via **323-16**: $(|x|, |y| \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq ||x|| \leq ||y||).$

`2.1:` Aus `1.2` "$|x|, |y| \in \mathbb{S} \ldots$"

folgt via **321-28**: $\boxed{x, y \in \mathbb{B}}$

`2.2:` Via **323-19** gilt: $||x|| = |x|.$

`2.3:` Via **323-19** gilt: $||y|| = |y|.$

`3:` Aus `1.2` "$\ldots 0 \leq ||x|| \leq ||y||$",
aus `2.2` und
aus `2.3`

folgt: $\boxed{0 \leq |x| \leq |y|}$

<u>Beweis **323-20**</u> `b)` `VS` gleich $|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2.$

`1:` Aus `VS` gleich "$|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2.$

`2:` Aus `1`"$|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{x, y \in \mathbb{B}}$

`3:` Aus `2`"$x, y \in \mathbb{B}$"
folgt via **321-28**: $|x| \in \mathbb{S}.$

`4:` Aus `3`"$|x| \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$"
folgt via **323-16**: $0 \leq ||x|| < ||y||.$

`5.1:` Via **323-19** gilt: $||x|| = |x|.$

`5.2:` Via **323-19** gilt: $||y|| = |y|.$

`6:` Aus `4`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $\boxed{0 \leq |x| < |y|}$

□

323-21. Gilt $|x| \leq |y|$ oder $|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$, so sind alle hier vorkommenden Terme nicht-negativ.

323-21(Satz)

a) *Aus* “$|x| \leq |y|$” *folgt* “$0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$”.

b) *Aus* “$|x| < |y|$” *folgt* “$0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$”.

c) *Aus* “$|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$” *folgt* “$0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$”.

d) *Aus* “$|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$” *folgt* “$0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$”.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **323-21** a) VS gleich $|x| \leq |y|$.

1: Aus VS gleich “$|x| \leq |y|$”
folgt via **323-11**: $0 \leq |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$.

2.1: Aus 1
folgt: $\boxed{0 \leq |x| \uparrow 2}$

2.2: Aus 1“$0 \leq |x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$”
folgt via **107-8**: $\boxed{0 \leq |y| \uparrow 2}$

2.3: Aus 1“$|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$”
folgt via **323-20**: $0 \leq |x| \leq |y|$.

3.1: Aus 2.3
folgt: $\boxed{0 \leq |x|}$

3.2: Aus 2.3“$0 \leq |x| \leq |y|$”
folgt via **107-8**: $\boxed{0 \leq |y|}$

<u>Beweis</u> **323-21** `b)` `VS` gleich $|x| < |y|$.

`1:` Aus `VS` gleich “$|x| < |y|$”
folgt via **41-3**: $|x| \leq |y|$.

`2:` Aus `1`“$|x| \leq |y|$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$.

`c)` `VS` gleich $|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$.

`1:` Aus `VS` gleich “$|x| \uparrow 2 \leq |y| \uparrow 2$”
folgt via **323-20**: $|x| \leq |y|$.

`2:` Aus `1`“$|x| \leq |y|$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$.

`d)` `VS` gleich $|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$.

`1:` Aus `VS` gleich “$|x| \uparrow 2 < |y| \uparrow 2$”
folgt via **323-20**: $|x| < |y|$.

`2:` Aus `1`“$|x| < |y|$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $0 \leq |x|, |x| \uparrow 2, |y|, |y| \uparrow 2$.

□

323-22. Bei der Spezialisierung von M auf $\leq$ vereinfacht sich in **322-4** Einiges.

323-22(Satz) *Es gelte:*

→) f *Funktion.*

→) f *injektiv.*

→) f *streng* $\leq$ *_isoton auf* $E \subseteq \mathbb{S}$.

Dann folgt “f^{-1} *streng* $\leq$ *_isoton auf* $f[E]$*”.*

Beweis **323-22**

1.1: Aus →)“ $\ldots E \subseteq \mathbb{S}$ ”
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

1.2: Aus **AAVII**“ $\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus →)“ f Funktion ”,
aus →)“ f injektiv ”,
aus →)“ f streng $\leq$ _isoton auf $E \ldots$ ”,
aus 1“ E ist $\leq$ _Kette ” und
aus 1.2“ $\leq$ antiSymmetrisch ”
folgt via **322-4**: f^{-1} streng $\leq$ _isoton auf $f[E]$.

□

323-23. Bei der Spezialisierung von M auf $\leq$ vereinfacht sich in **322-5** Einiges.

323-23(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) f *injektiv.*

$\rightarrow$) f *streng* $\leq$ *_antiton auf* $E \subseteq \mathbb{S}$.

Dann folgt " f^{-1} *streng* $\leq$ *_antiton auf* $f[E]$ *".*

Beweis **323-23**

1.1: Aus $\rightarrow$) "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **157-2**: E ist $\leq$ _Kette.

1.2: Aus **AAVII** "$\leq$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$"
folgt via **34-13**: $\leq$ antiSymmetrisch.

2: Aus $\rightarrow$) "f Funktion",
aus $\rightarrow$) "f injektiv",
aus $\rightarrow$) "f streng $\leq$ _antiton auf $E \ldots$",
aus 1 "E ist $\leq$ _Kette" und
aus 1.2 "$\leq$ antiSymmetrisch"
folgt via **322-5**: f^{-1} streng $\leq$ _antiton auf $f[E]$.

$\square$

323-24. Unter Umständen kann für injektives x aus $x[\{p\} \cup y] = \{q\} \cup z$ auf $x[y] \subseteq z$ geschlossen werden.

<u>**323-24(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *x injektiv.*

$\rightarrow\!)$ $x[\{p\} \cup y] = \{q\} \cup z$.

$\rightarrow\!)$ $p \notin y$.

$\rightarrow\!)$ $(p, q) \in x$.

Dann folgt "$x[y] \subseteq z$".

<u>Beweis **323-24**</u>

`Thema1.1` $\alpha \in x[y]$.

2: Via **2-7** gilt: $y \subseteq \{p\} \cup y$.

3: Aus 2"$y \subseteq \{p\} \cup y$"
folgt via **8-9**: $x[y] \subseteq x[\{p\} \cup y]$.

4: Aus 3 und
aus $\rightarrow\!)$"$x[\{p\} \cup y] = \{q\} \cup z$"
folgt: $x[y] \subseteq \{q\} \cup z$.

5: Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x[y]$" und
aus 4"$x[y] \subseteq \{q\} \cup z$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \{q\} \cup z$.

6: Aus 5"$\alpha \in \{q\} \cup z$"
folgt via **94-8**: $(\alpha = q) \vee (\alpha \in z)$.
`Fallunterscheidung`

...

...

<u>Beweis **323-24**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in x[y]$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{6.1.Fall}}$ $\alpha = q$.

`7:` Aus `Thema1.1`"$\alpha \in x[y]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in y) \wedge ((\Omega, \alpha) \in x)$.

`8:` Aus `6.1.Fall`"$\alpha = q$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \alpha) = (\Omega, q)$.

`9:` Aus `8` und
aus `7`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in x$"
folgt: $(\Omega, q) \in x$.

`10:` Aus →)"x injektiv",
aus →)"$(p, q) \in x$" und
aus `9`"$(\Omega, q) \in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $p = \Omega$.

`11.1:` Aus `10` und
aus `7`"$\ldots \Omega \in y \ldots$"
folgt: $p \in y$.

`11.2:` Via →) gilt: $p \notin y$.

$\boxed{\texttt{6.2.Fall}}$ $\alpha \in z$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\alpha \in z$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x[y]) \Rightarrow (\alpha \in z)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $x[y] \subseteq z$.

$\square$

323-25. Falls $x \cup y = x \cup z$ mit $x \cap y = x \cap z = 0$, dann $y = z$.

<u>**323-25(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $x \cup y = x \cup z$.

$\rightarrow)$ $x \cap y = 0$.

$\rightarrow)$ $x \cap z = 0$.

Dann folgt "$y = z$".

<u>Beweis **323-25**</u>

1.1: $y \stackrel{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} y \cap (y \cup x) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} y \cap (x \cup y) \stackrel{\rightarrow)}{=} y \cap (x \cup z) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (y \cap x) \cup (y \cup z)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap y) \cup (y \cup z) \stackrel{\rightarrow)}{=} 0 \cup (y \cup z) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} y \cup z$.

1.2: $z \stackrel{\mathbf{VG}\cap\cup}{=} z \cap (z \cup x) \stackrel{\mathbf{KG}\cup}{=} z \cap (x \cup z) \stackrel{\rightarrow)}{=} z \cap (x \cup y) \stackrel{\mathbf{DG}\cap\cup}{=} (z \cap x) \cup (z \cup y)$
$\stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} (x \cap z) \cup (z \cup y) \stackrel{\rightarrow)}{=} 0 \cup (z \cup y) \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} z \cup y$.

2.1: Aus 1.1"$y = \ldots = y \cup z$"
folgt via **2-10**: $z \subseteq y$.

2.2: Aus 1.2"$z = \ldots = z \cup y$"
folgt via **2-10**: $y \subseteq z$.

3: Aus 2.2"$y \subseteq z$" und
aus 2.1"$z \subseteq y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y = z$.

□

323-26. Unter Umständen kann für injektive Funktionen f aus $f[\{p\} \cup x] = \{f(p)\} \cup y$ auf $f[x] = y$ geschlossen werden.

323-26(Satz) *Es gelte:*

→) f *Funktion.*

→) f *injektiv.*

→) $f[\{p\} \cup x] = \{f(p)\} \cup y$.

→) $p \notin x$.

→) $f(p) \notin y$.

Dann folgt “$f[x] = y$”.

Beweis **323-26**

1: Aus →) “ $p \notin x$ ”
folgt via **2-30**: $\{p\} \cap x = 0.$

2: Aus →) “ f injektiv ” und
aus 1 “ $\{p\} \cap x = 0$ ”
folgt via **9-21**: $f[\{p\}] \cap f[x] = 0.$

3: Aus →) “ f Funktion ”
folgt via **259-16**: $f[\{p\}] = \{f(p)\}.$

4.1: Aus 3 und
aus 2
folgt: $\{f(p)\} \cap f[x] = 0.$

4.2: Aus →) “ $f(p) \notin y$ ”
folgt via **2-30**: $\{f(p)\} \cap y = 0.$

5: Via **9-8** gilt: $f[\{p\} \cup x] = f[\{p\}] \cup f[x].$

6: Aus 5 und
aus →) “ $f[\{p\} \cup x] = \{f(p)\} \cup y$ ”
folgt: $f[\{p\} \cup f[x] = \{f(p)\} \cup y.$

7: Aus 6 und
aus 3
folgt: $\{f(p)\} \cup f[x] = \{f(p)\} \cup y.$

8: Aus 7 “ $\{f(p)\} \cup f[x] = \{f(p)\} \cup y$ ” ,
aus 4.1 “ $\{f(p)\} \cap f[x] = 0$ ” und
aus 4.2 “ $\{f(p)\} \cap y = 0$ ”
folgt via **323-25**: $f[x] = y.$

□

323-27. Durch "Realisierung" ergibt sich aus **18-52** Hinreichendes für das Vorliegen einer Klasse, die keine Funktion ist.

323-27(Satz)

a) *Aus* "$(p,q),(p,r) \in x$" *und* "$q \neq r$" *folgt* "x *keine Funktion*".

b) *Aus* "p_M_q" *und* "p_M_r" *und* "$q \neq r$" *folgt* "M *keine Funktion*".

Beweis **323-27** a) VS gleich $((p,q),(p,r) \in x) \wedge (q \neq r)$.

1.1: Aus VS gleich "$(p,q) \ldots \in x \ldots$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots (p,r) \in x \ldots$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi = r$.

2.1: Aus 1.1"$\ldots (\Omega = p) \wedge (\Phi = q)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p,q)$.

2.2: Aus 1.1"$\ldots \Omega = p \ldots$" und
aus 1.2"$\ldots \Psi = r$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p,r)$.

2.3: Aus 1.1"$\ldots \Phi = q$" und
aus 1.2"$\ldots \Psi = r$" und
aus VS gleich "$\ldots q \neq r$"
folgt: $\Phi \neq \Psi$.

3.1: Aus 2.1 und
aus VS gleich "$(p,q) \ldots \in x \ldots$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in x$.

3.2: Aus 2.2 und
aus VS gleich "$\ldots (p,r) \in x \ldots$"
folgt: $(\Omega, \Psi) \in x$.

4: Aus 1.1"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 1.2"$\exists \Psi \ldots$",
aus 3.1,
aus 3.2 und
aus 2.3
folgt: $\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi), (\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Phi \neq \Psi)$.

...

<u>Beweis</u> **323-27** `a)` `VS` gleich $((p,q),(p,r) \in x) \wedge (q \neq r)$.

...

`5:` Aus `4` "$\exists \Omega, \Phi, \Psi : ((\Omega, \Phi), (\Omega, \Psi) \in x) \wedge (\Phi \neq \Psi)$"
folgt via **18-52**: x keine Funktion.

`b)` `VS` gleich $(p\_M\_q) \wedge (p\_M\_r) \wedge (q \neq r)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_q \ldots$"
folgt: $(p,q) \in M$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_r \ldots$"
folgt: $(p,r) \in M$.

`2:` Aus `1.1` "$(p,q) \in M$",
aus `1.2` $(p,r) \in M$ und
aus `VS` gleich "$\ldots q \neq r$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: M keine Funktion.

$\square$

323-28. Einigermaßen vom Umweg über **AAVII** ermüdet sollen - endlich - grundlegende Ordnungsaspekte von $\leq$ in einem eigenen Satz zusammen gefasst werden.

323-28(Satz)

a) $\leq$ *Relation in* $\mathbb{S}$.

b) $\leq$ *reflexiv in* $\mathbb{S}$.

c) $\leq$ *transitiv in* $\mathbb{S}$.

d) $\leq$ *antiSymmetrisch in* $\mathbb{S}$.

e) $\leq$ *Relation.*

f) $\leq$ *transitiv.*

g) $\leq$ *antiSymmetrisch.*

h) $\leq$ *keine Funktion.*

<u>Beweis **323-28**</u> `abcdefg)`

`1.a):` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **30-79(Def)**: $\le$ Relation in $\mathbb{S}$.

`1.b):` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **30-79(Def)**: $\le$ reflexiv in $\mathbb{S}$.

`1.c):` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **30-79(Def)**: $\le$ transitiv in $\mathbb{S}$.

`1.d):` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **30-79(Def)**: $\le$ antiSymmetrisch in $\mathbb{S}$.

`2.e):` Aus `1.a)`“$\le$ Relation in $\mathbb{S}$”
folgt via **10-14**: $\le$ Relation.

`2.f):` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\le$ transitiv.

`2.g):` Aus **AAVII**“$\le$ antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$”
folgt via **34-13**: $\le$ antiSymmetrisch..

`h)`

Aus $\le$**schola**“$0 \le 0$” ,
aus $\le$**schola**“$0 \le 1$” und
aus $\neq$**schola**“$0 \neq 1$”
folgt via **323-27**: $\le$ keine Funktion.

$\square$

323-29. Jede auf E streng $\leq$ _isotone/streng $\leq$ _antitone Funktion ist dort $\leq$ _isoton/$\leq$ _antiton.

323-29(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "f streng $\leq$ _isoton auf E" folgt "f ist $\leq$ _isoton auf E".*

b) *Aus "f Funktion" und "f streng $\leq$ _antiton auf E" folgt "f ist $\leq$ _antiton auf E".*

Beweis **323-29** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ streng } \leq \text{\_isoton auf } E)$.

1: Via **323-28** gilt: $\leq$ reflexiv in $f[E]$.

2: Aus VS gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ streng } \leq \text{\_isoton auf } E)$" und aus 1 "$\leq$ reflexiv in $f[E]$" folgt via **320-13**: f ist $\leq$ _isoton auf E.

b) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ streng } \leq \text{\_antiton auf } E)$.

1: Via **323-28** gilt: $\leq$ reflexiv in $f[E]$.

2: Aus VS gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ streng } \leq \text{\_antiton auf } E)$" und aus 1 "$\leq$ reflexiv in $f[E]$" folgt via **320-14**: f ist $\leq$ _antiton auf E.

□

323-30. Da $\uparrow 2$ und qudr auf $[0|+\infty]$ streng $\leq$ _isotone Funktionen sind, sind diese Klassen via **323-29** auf $[0|+\infty]$ auch $\leq$ _isoton.

<u>**323-30(Satz)**</u>

a) $\uparrow 2$ *ist* $\leq$ *_isoton auf* $[0|+\infty]$.

b) qudr *ist* $\leq$ *_isoton auf* $[0|+\infty]$.

<u>Beweis **323-30**</u> a)
Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion" und
aus **323-6**"$\uparrow 2$ streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$
folgt via **323-29**: $\uparrow 2$ ist $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$.

b)
Aus **318-4**"qudr Funktion" und
aus **323-8**"qudr streng $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$
folgt via **323-29**: qudr ist $\leq$ _isoton auf $[0|+\infty]$.
$\square$

323-31. Aus $x \notin \mathbb{S}$ folgt unter anderem $x \notin [a|b]$. Im Speziellen gilt unter anderem $\mathsf{nan} \notin [a|b]$.

323-31(Satz)

a) *Aus* "$x \notin \mathbb{S}$" *folgt* "$x \notin [a|b]$" *und* "$x \notin]a|b[$" *und* "$x \notin]a|b]$" *und* "$x \notin [a|b[$".

b) *Aus* "$x \notin \mathbb{S}$" *folgt* "$\{x\} \cap [a|b] = 0$" *und* "$\{x\} \cap]a|b[= 0$" *und* "$\{x\} \cap]a|b] = 0$" *und* "$\{x\} \cap [a|b[= 0$".

c) "$\mathsf{nan} \notin [a|b]$" *und* "$\mathsf{nan} \notin]a|b[$" *und* "$\mathsf{nan} \notin]a|b]$" *und* "$\mathsf{nan} \notin [a|b[$".

d) "$\{\mathsf{nan}\} \cap [a|b] = 0$" *und* "$\{\mathsf{nan}\} \cap]a|b[= 0$" *und* "$\{\mathsf{nan}\} \cap]a|b] = 0$" *und* "$\{\mathsf{nan}\} \cap [a|b[= 0$".

<u>Beweis **323-31**</u> `a)` `VS` gleich $x \notin \mathbb{S}$.

`1.1:` Via **142-4** gilt: $[a|b] \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Via **142-4** gilt: $]a|b[\subseteq \mathbb{S}$.

`1.3:` Via **142-4** gilt: $]a|b] \subseteq \mathbb{S}$.

`1.4:` Via **142-4** gilt: $[a|b[\subseteq \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$" und aus `1.1` "$[a|b] \subseteq \mathbb{S}$"

folgt via **0-4**: $\boxed{x \notin [a|b]}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$" und aus `1.2` "$]a|b[\subseteq \mathbb{S}$"

folgt via **0-4**: $\boxed{x \notin]a|b[}$

`2.3:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$" und aus `1.3` "$]a|b] \subseteq \mathbb{S}$"

folgt via **0-4**: $\boxed{x \notin]a|b]}$

`2.4:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$" und aus `1.4` "$[a|b[\subseteq \mathbb{S}$"

folgt via **0-4**: $\boxed{x \notin [a|b[}$

<u>Beweis **323-31**</u> `b)` `VS` gleich $x \notin \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(x \notin [a|b]) \wedge (x \notin]a|b[) \wedge (x \notin]a|b]) \wedge (x \notin [a|b[).$$

`2.1:` Aus `1`"$x \notin [a|b] \ldots$"
folgt via **2-30**: $\{x\} \cap [a|b] = 0$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots x \notin]a|b[\ldots$"
folgt via **2-30**: $\{x\} \cap]a|b[= 0$

`2.3:` Aus `1`"$\ldots x \notin]a|b] \ldots$"
folgt via **2-30**: $\{x\} \cap]a|b] = 0$

`2.4:` Aus `1`"$\ldots x \notin [a|b[$"
folgt via **2-30**: $\{x\} \cap [a|b[= 0$

`c)`

`1.1:` Aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{\mathsf{nan} \notin [a|b]}$

`1.2:` Aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{\mathsf{nan} \notin]a|b[}$

`1.3:` Aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{\mathsf{nan} \notin [a|b[}$

`1.4:` Aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{\mathsf{nan} \notin]a|b]}$

Beweis **323-31** `d)`

`1.1:` Aus **95-11** "$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\{\mathsf{nan}\} \cap [a|b] = 0}$

`1.2:` Aus **95-11** "$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\{\mathsf{nan}\} \cap]a|b[= 0}$

`1.3:` Aus **95-11** "$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\{\mathsf{nan}\} \cap]a|b] = 0}$

`1.4:` Aus **95-11** "$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\{\mathsf{nan}\} \cap [a|b[= 0}$

□

323-32. Es gilt $\mathsf{qudr}[[0|+\infty]] = [0|+\infty]$.

323-32(Satz)

a) $\mathsf{qudr}[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

b) $\mathsf{qudr}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

c) $\mathsf{qudr}[[0|+\infty]] = [0|+\infty]$.

Beweis **323-32** a)

$\mathsf{qudr}[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] \overset{\mathbf{318-4}}{=} \mathsf{qudr}[\mathsf{dom}\,\mathsf{qudr}] \overset{\mathbf{8-10}}{=} \mathsf{ran}\,\mathsf{qudr} \overset{\mathbf{318-4}}{=} \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

b)

1: Aus **95-3** "nan Menge"
folgt via **2-28**: $\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

2: Aus 1 "$\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **318-4**: $\mathsf{qudr}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan} \uparrow 2$.

3: Aus 2 und
aus **317-14** "$\mathsf{nan} \uparrow 2 = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{qudr}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

c)

1.1: Aus a) "$\mathsf{qudr}[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus b) "$\mathsf{qudr}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$"
folgt: $\mathsf{qudr}[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] = \{\mathsf{qudr}(\mathsf{nan})\} \cup [0|+\infty]$.

1.2: Via **323-31** gilt: $\mathsf{nan} \notin [0|+\infty]$.

2: Aus 1.2 und
aus b)
folgt: $\mathsf{qudr}(\mathsf{nan}) \notin [0|+\infty]$.

3: Aus **318-4** "qudr Funktion",
aus **323-8** "qudr injektiv",
aus 1.1 "$\mathsf{qudr}[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] = \{\mathsf{qudr}(\mathsf{nan})\} \cup [0|+\infty]$",
aus 1.2 "$\mathsf{nan} \notin [0|+\infty]$" und
aus 2 "$\mathsf{qudr}(\mathsf{nan}) \notin [0|+\infty]$"
folgt via **323-28**: $\mathsf{qudr}[[0|+\infty]] = [0|+\infty]$.

□

323-33. Bei $\sqrt{\cdot}$ handelt es sich um eine injektive Funktion, die auf $[0|+\infty]$ streng $\leq$ _isoton ist.

323-33(Satz)

a) $\sqrt{\cdot}$ *injektiv.*

b) $\sqrt{\cdot}\,[\,\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\,] = \{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

c) $\sqrt{\cdot}\,[\,[0|+\infty]\,] = [0|+\infty]$.

d) $\sqrt{\cdot}$ *streng* $\leq$ *_isoton auf* $[0|+\infty]$.

e) $\sqrt{\cdot}$ *ist* $\leq$ *_isoton auf* $[0|+\infty]$.

Beweis **323-33** a)
Aus **318-5**“ $\sqrt{\cdot} : \{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty] \to \{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$ bijektiv”
folgt via **22-1(Def)**: $\sqrt{\cdot}$ injektiv.

b)
$$\sqrt{\cdot}\,[\,\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\,] \overset{318-5}{=} \sqrt{\cdot}\,[\mathsf{dom}\,(\sqrt{\cdot})] \overset{8-10}{=} \mathsf{ran}\,(\sqrt{\cdot}) \overset{318-5}{=} \{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty].$$

c)

1.1: Aus b)“ $\sqrt{\cdot}\,[\,\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\,] = \{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$” und
aus **318-7**“ $\sqrt{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$”
folgt: $\sqrt{\cdot}\,[\,\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\,] = \{\sqrt{\mathsf{nan}}\}\cup[0|+\infty]$.

1.2: Via **323-31** gilt: $\mathsf{nan} \notin [0|+\infty]$.

2: Aus 1.2 und
aus **318-7**“ $\sqrt{\mathsf{nan}} = \mathsf{nan}$”
folgt: $\sqrt{\mathsf{nan}} \notin [0|+\infty]$.

3: Aus **318-5**“ $\sqrt{\cdot}$ Funkton”,
aus a)“ $\sqrt{\cdot}$ injektiv”,
aus 1.1“ $\sqrt{\cdot}\,[\,\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\,] = \{\sqrt{\mathsf{nan}}\}\cup[0|+\infty]$ ”,
aus 1.2“ $\mathsf{nan} \notin [0|+\infty]$ ” und
aus 2“ $\sqrt{\mathsf{nan}} \notin [0|+\infty]$ ”
folgt via **323-26**: $\sqrt{\cdot}\,[\,[0|+\infty]\,] = [0|+\infty]$.

<u>Beweis **323-33**</u> `de)`

`1:` Via **142-4** gilt: $[0|+\infty] \subseteq \mathbb{S}$.

`2:` Aus **318-4**"qudr Funkton",
aus **323-8**"qudr injektiv",
aus **323-8**"qudr streng $\leq$_isoton auf $[0|+\infty]$" und
aus `1`"$[0|+\infty] \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **323-22**: qudr^{-1} streng $\leq$_isoton auf $[0|+\infty]$.

`3.d):` Aus `2` und
aus **318-2(Def)**"$\sqrt{.} = \mathsf{qudr}^{-1}$"
folgt: $\sqrt{.}$ streng $\leq$_isoton auf $[0|+\infty]$.

`4.e):` Aus `3.d)`"$\sqrt{.}$ streng $\leq$_isoton auf $[0|+\infty]$"
folgt via **323-29**: $\sqrt{.}$ ist $\leq$_isoton auf $[0|+\infty]$.

□

323-34. Falls $0 \le x \le y$, dann $0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y}$. Falls $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$, dann $0 \le x \le y$. Die Beweis-Reihenfolge ist `abdcfe)`

323-34(Satz)

`a)` *Aus* “$\sqrt{x} \le \sqrt{y}$” *folgt* “$0 \le x, \sqrt{x}, y, \sqrt{y}$”.

`b)` *Aus* “$\sqrt{x} < \sqrt{y}$” *folgt* “$0 \le x, \sqrt{x}, y, \sqrt{y}$”.

`c)` *Aus* “$0 \le x \le y$” *folgt* “$0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y}$”.

`d)` *Aus* “$0 \le x < y$” *folgt* “$0 \le \sqrt{x} < \sqrt{y}$”.

`e)` *Aus* “$\sqrt{x} \le \sqrt{y}$” *folgt* “$0 \le x \le y$”.

`f)` *Aus* “$\sqrt{x} < \sqrt{y}$” *folgt* “$0 \le x < y$”.

≤-Notation.

Beweis **323-34** `a)` `VS` gleich $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\sqrt{x} \le \sqrt{y}$” folgt via **107-3**: $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1`“$\sqrt{x} \ldots \in \mathbb{S}$” folgt via **321-27**: $\boxed{0 \le x, \sqrt{x}}$

`2.2:` Aus `1`“$\ldots \sqrt{y} \in \mathbb{S}$” folgt via **321-27**: $\boxed{0 \le y, \sqrt{y}}$

`b)` `VS` gleich $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\sqrt{x} < \sqrt{y}$” folgt via **41-3**: $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$.

`2:` Aus `1`“$\sqrt{x} \le \sqrt{y}$” folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \le x, \sqrt{x}, y, \sqrt{y}$.

Beweis **323-34** `d)` `VS` gleich $0 \leq x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **142-3**: $x \in [0| + \infty]$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x < y$"
folgt via **107-8**: $0 < y$.

`2:` Aus `1.2`"$0 < y$"
folgt via **41-3**: $0 \leq y$.

`3:` Aus `2`"$0 \leq y$"
folgt via **142-3**: $y \in [0| + \infty]$.

`4.1:` Via **142-4** gilt: $[0| + \infty] \subseteq \mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `1.1`"$x \in [0| + \infty]$",
aus `3`"$y \in [0| + \infty]$" und
aus **323-32**"$\mathsf{qudr}[[0| + \infty]] = [0| + \infty]$"
folgt: $x, y \in \mathsf{qudr}[[0| + \infty]]$.

`5:` Aus **318-4**"qudr Funktion",
aus **323-8**"qudr injektiv",
aus **323-8**"qudr streng $\leq$ -isoton auf $[0| + \infty]$",
aus `4.1`"$[0| + \infty] \subseteq \mathbb{S}$",
aus `4.2`"$x, y \in \mathsf{qudr}[[0| + \infty]]$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via **323-1**: $\mathsf{qudr}^{-1}(x) < \mathsf{qudr}^{-1}(y)$.

`6:` Aus `5` und
aus **318-2(Def)**"$\sqrt{.} = \mathsf{qudr}^{-1}$"
folgt: $\boxed{\sqrt{x} < \sqrt{y}}$

`7:` Aus `6`"$\sqrt{x} < \sqrt{y}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{0 \leq \sqrt{x}}$

<u>Beweis **323-34**</u> `c)` `VS` gleich $0 \leq x \leq y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < y.$

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$" und
aus `1.1.Fall` "$x < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{y}.$

`3:` Aus `2` "$\ldots \sqrt{x} < \sqrt{y}$"
folgt via **41-3**: $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$

`4:` Aus `2` "$0 \leq \sqrt{x} \ldots$" und
aus `3`
folgt: $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$

`1.2.Fall` $x = y.$

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$x = y$"
folgt: $\sqrt{x} = \sqrt{y}.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **321-27**: $0 \leq \sqrt{x} \in \mathbb{S}.$

`3:` Aus `2.2` "$\ldots \sqrt{x} \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $\sqrt{x} \leq \sqrt{x}.$

`4:` Aus `3` und
aus `2.1`
folgt: $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$

`5:` Aus `2.2` "$0 \leq \sqrt{x} \ldots$" und
aus `4`
folgt: $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$

<u>Beweis **323-34**</u> `f)` `VS` gleich $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\sqrt{x} < \sqrt{y}$"
folgt via **107-9**: $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1`"$\sqrt{x} \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-27**: $0 \leq x, \sqrt{x}$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \sqrt{y} \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-27**: $0 \leq y, \sqrt{y}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$0 \leq x \ldots$"
folgt via **142-3**: $x \in [0| + \infty]$.

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \leq y \ldots$"
folgt via **142-3**: $y \in [0| + \infty]$.

`3.3:` Via **142-4** gilt: $[0| + \infty] \subseteq \mathbb{S}$.

`4:` Aus **318-5**"$\sqrt{\cdot}$ Funktion",
aus **323-33**"$\sqrt{\cdot}$ injektiv",
aus **323-33**"$\sqrt{\cdot}$ streng $\leq$ _isoton auf $[0| + \infty]$",
aus `3.3`"$[0| + \infty] \subseteq \mathbb{S}$",
aus `3.1`"$x \in [0| + \infty]$",
aus `3.2`"$y \in [0| + \infty]$" und
aus `VS` gleich "$\sqrt{x} < \sqrt{y}$"
folgt via **323-3**: $x < y$.

`5:` Aus `2.1`"$0 \leq x \ldots$" und
aus `4`
folgt: $0 \leq x < y$.

<u>Beweis **323-34**</u> `e) VS` gleich $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$"
folgt via **41-5**: $(\sqrt{x} < \sqrt{y}) \vee (\sqrt{x} = \sqrt{y})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\sqrt{x} < \sqrt{y}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $0 \leq x < y$.

`3:` Aus `2`"$\ldots x < y$"
folgt via **41-3**: $x \leq y$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq x \ldots$" und
aus `3`
folgt: $0 \leq x \leq y$.

`1.2.Fall` $\sqrt{x} = \sqrt{y}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$"
folgt via **107-3**: $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{S}$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`"$\sqrt{x} = \sqrt{y}$"
folgt: $(\sqrt{x}) \uparrow 2 = (\sqrt{y}) \uparrow 2$.

`3.1:` Aus `2.1`"$0 \leq x$"
folgt via **107-3**: $x \leq x$.

`3.2:` Aus `2.2`"$\sqrt{x} \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-9**: $(\sqrt{x}) \uparrow 2 = x$.

`3.3:` Aus `2.2`"$\ldots \sqrt{y} \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-9**: $(\sqrt{y}) \uparrow 2 = y$.

`4:` Aus `2.3`,
aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $x = y$.

`5:` Aus `3.1` und
aus `4`
folgt: $x \leq y$.

`6:` Aus `2.1` und
aus `5`
folgt: $0 \leq x \leq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq x \leq y$.

□

Beginn Folklore.
Analysis: Einiges über $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

Ersterstellung: 09/01/15 **Letzte Änderung: 15/01/15**

324-1. Bei der Überarbeitung des ersten Teils von **Suite IV - Die Zwiespältige** nimmt das Resultats-Nummern-Zitieren von "Standard-Resultaten" - etwa von **1-3** "$p \in \{p\}$ genau dann, wenn p Menge" - recht viel Zeit in Anspruch. Ich erinnere mich, in einer Analysis-Vorlesung, die als Vorgänger-Projekt zum LW angesehen werden kann, in Ermangelung genauer Quellen "Altbekanntes" als "Folklore" bezeichnet zu haben. Diesen Faden nehme ich hier auf und sammle ab sofort besonders einleuchtend scheinende Resultate in einer eigenen Aussagen-Sammlung, die sinniger Weise als "Folklore" bezeichnet wird und greife auf die dort notierten Aussagen in *unspezifischer* Weise durch das Kürzel **folk** zu. Diese Art des Zitierens ist durch die Bezeichnung spezieller Sätze mit Namen - etwa **FSA** - bereits vorbereitet.

324-1(Satz)

Aus "$0 \neq a \in \mathbb{R}$" *und* "$x \in \mathbb{T}$" *folgt* "$a \cdot (x : a) = x$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **324-1** `VS` gleich $(0 \neq a \in \mathbb{R}) \wedge (x \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $0 \neq 1 : a \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$0 \neq 1 : a \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{T}$"
folgt via **DKR**$\mathbb{T}$: $((1 : a) \cdot x) : (1 : a) = x$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $a \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$a \in \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $a = 1 : (1 : a)$.

`5:` $a \cdot (x : a) \stackrel{\text{folk}}{=} a \cdot ((1 : a) \cdot x) \stackrel{4}{=} (1 : (1 : a)) \cdot ((1 : a) \cdot x)$
$\stackrel{\text{folk}}{=} ((1 : a) \cdot x) : (1 : a) \stackrel{2}{=} x$.

□

324-2. Falls $0 < a \in \mathbb{R}$, so gilt $a \cdot x \leq y$ genau dann, wenn $x \leq y : a$.

324-2(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) $0 < a \in \mathbb{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $a \cdot x \leq y$.

`ii)` $x \leq y : a$.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **324-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $a \cdot x \leq y.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \cdot x \leq y$"
folgt via **folk**: $a \cdot x \in \mathbb{S}.$

`1.2:` Aus →) "$0 < a \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq a.$

`1.3:` Aus →) "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via ∧**SZ**: $a \in \mathbb{T}.$

`1.4:` Aus →) "$0 < a \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $0 < 1 : a \in \mathbb{R}.$

`2.1:` Aus `1.2`"$0 \neq a$",
aus `1.3`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `1.1`"$a \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $x \in \mathbb{S}.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$a \cdot x \leq y$" und
aus `1.4`"$0 < 1 : a \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $(1 : a) \cdot (a \cdot x) \leq (1 : a) \cdot y.$

`3.1:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via ∧**SZ**: $x \in \mathbb{T}.$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt via **folk**: $(a \cdot x) : a \leq y : a.$

`4:` Aus `1.2`"$0 \neq a$",
aus →) "$\ldots a \in \mathbb{R}$" und
aus `3.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **DKR**$\mathbb{T}$: $(a \cdot x) : a = x.$

`5:` Aus `3.2` und
aus `4`
folgt: $x \leq y : a.$

<u>Beweis **324-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x \le y : a.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \le y : a$"
folgt via **folk**: $y : a \in \mathbb{S}.$

`1.2:` Aus →) "$0 < a \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \ne a.$

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x \le y : a$" und
aus →) "$0 < a \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $a \cdot x \le a \cdot (y : a).$

`1.4:` Aus →) "$0 < a \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $0 < 1 : a \in \mathbb{R}.$

`2.1:` Aus `1.1`
folgt via **folk**: $(1 : a) \cdot y \in \mathbb{S}.$

`2.2:` Aus `1.4`"$0 < 1 : a \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \ne 1 : a.$

`2.3:` Aus `1.4`"$\ldots 1 : a \in \mathbb{R}$"
folgt via ∧**SZ**: $1 : a \in \mathbb{T}.$

`3:` Aus `2.2`"$0 \ne 1 : a$",
aus `2.3`"$1 : a \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1`"$(1 : a) \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $y \in \mathbb{S}.$

`4:` Aus `3`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via ∧**SZ**: $y \in \mathbb{T}.$

`5:` Aus `1.2`"$0 \ne a$",
aus →) "$\ldots a \in \mathbb{R}$" und
aus `4`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **324-1**: $a \cdot (y : a) = y.$

`6:` Aus `1.3` und
aus `5`
folgt: $a \cdot x \le y.$

□

324-3. Falls $0 < a \in \mathbb{R}$, so gilt $a \cdot x < y$ genau dann, wenn $x < y : a$.

324-3(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) $0 < a \in \mathbb{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $a \cdot x < y$.

`ii)` $x < y : a$.

$\leq$`.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **324-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $a \cdot x < y.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \cdot x < y$"
folgt via **folk**: $a \cdot x \in \mathbb{S}.$

`1.2:` Aus →) "$0 < a \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq a.$

`1.3:` Aus →) "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via ∧**SZ**: $a \in \mathbb{T}.$

`1.4:` Aus →) "$0 < a \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $0 < 1 : a \in \mathbb{R}.$

`2.1:` Aus `1.2`"$0 \neq a$",
aus `1.3`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `1.1`"$a \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $x \in \mathbb{S}.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$a \cdot x < y$" und
aus `1.4`"$0 < 1 : a \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $(1 : a) \cdot (a \cdot x) < (1 : a) \cdot y.$

`3.1:` Aus `2.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via ∧**SZ**: $x \in \mathbb{T}.$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt via **folk**: $(a \cdot x) : a < y : a.$

`4:` Aus `1.2`"$0 \neq a$",
aus →) "$\ldots a \in \mathbb{R}$" und
aus `3.1`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **DKR**$\mathbb{T}$: $(a \cdot x) : a = x.$

`5:` Aus `3.2` und
aus `4`
folgt: $x < y : a.$

<u>Beweis **324-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x < y : a.$

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x < y : a$”
folgt via **folk**: $y : a \in \mathbb{S}.$

`1.2:` Aus →) “$0 < a \ldots$”
folgt via **41-3**: $0 \neq a.$

`1.3:` Aus `VS` gleich “$x < y : a$” und
aus →) “$0 < a \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $a \cdot x < a \cdot (y : a).$

`1.4:` Aus →) “$0 < a \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $0 < 1 : a \in \mathbb{R}.$

`2.1:` Aus `1.1`
folgt via **folk**: $(1 : a) \cdot y \in \mathbb{S}.$

`2.2:` Aus `1.4`“$0 < 1 : a \ldots$”
folgt via **41-3**: $0 \neq 1 : a.$

`2.3:` Aus `1.4`“$\ldots 1 : a \in \mathbb{R}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $1 : a \in \mathbb{T}.$

`3:` Aus `2.2`“$0 \neq 1 : a$”,
aus `2.3`“$1 : a \in \mathbb{T}$” und
aus `2.1`“$(1 : a) \cdot y \in \mathbb{S}$”
folgt via **131-1**: $y \in \mathbb{S}.$

`4:` Aus `3`“$y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{T}.$

`5:` Aus `1.2`“$0 \neq a$”,
aus →) “$\ldots a \in \mathbb{R}$” und
aus `4`“$y \in \mathbb{T}$”
folgt via **324-1**: $a \cdot (y : a) = y.$

`6:` Aus `1.3` und
aus `5`
folgt: $a \cdot x < y.$

□

324-4. Späteres Zitieren vereinfacht sich durch die Verfügbarkeit vorliegenden, geradezu auf Folklore abzielenden Resultats.

324-4(Satz)

a) *“$2 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 2$”.*

b) *“$3 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 3$”.*

c) *“$4 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 4$”.*

d) *“$5 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 5$”.*

e) *“$6 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 6$”.*

f) *“$7 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 7$”.*

g) *“$8 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 8$”.*

h) *“$9 \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : 9$”.*

i) *“$\mathsf{ten} \cdot x \leq y$” genau dann, wenn “$x \leq y : \mathsf{ten}$”.*

$\leq$.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **324-4**</u> a)
Aus $<$**schola**“$0<2$” und
aus $\in$**schola**“$2\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(2\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:2).$$

b)
Aus $<$**schola**“$0<3$” und
aus $\in$**schola**“$3\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(3\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:3).$$

c)
Aus $<$**schola**“$0<4$” und
aus $\in$**schola**“$4\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(4\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:4).$$

d)
Aus $<$**schola**“$0<5$” und
aus $\in$**schola**“$5\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(5\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:5).$$

e)
Aus $<$**schola**“$0<6$” und
aus $\in$**schola**“$6\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(6\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:6).$$

f)
Aus $<$**schola**“$0<7$” und
aus $\in$**schola**“$7\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(7\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:7).$$

g)
Aus $<$**schola**“$0<8$” und
aus $\in$**schola**“$8\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(8\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:8).$$

h)
Aus $<$**schola**“$0<9$” und
aus $\in$**schola**“$9\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(9\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:9).$$

i)
Aus $<$**schola**“$0<\mathsf{ten}$” und
aus $\in$**schola**“$\mathsf{ten}\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-2**: $$(\mathsf{ten}\cdot x\le y)\Leftrightarrow(x\le y:\mathsf{ten}).$$

$\square$

324-5. Von **324-4** ist auch eine "$<$-Version" verfügbar.

324-5(Satz)

a) *"$2 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 2$".*

b) *"$3 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 3$".*

c) *"$4 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 4$".*

d) *"$5 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 5$".*

e) *"$6 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 6$".*

f) *"$7 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 7$".*

g) *"$8 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 8$".*

h) *"$9 \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : 9$".*

i) *"$\mathsf{ten} \cdot x < y$" genau dann, wenn "$x < y : \mathsf{ten}$".*

$<$.RECH-**Notation**.

<u>Beweis **324-5**</u> `a)`
Aus $<$**schola**“$0 < 2$” und
aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(2 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 2).$$

`b)`
Aus $<$**schola**“$0 < 3$” und
aus $\in$**schola**“$3 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(3 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 3).$$

`c)`
Aus $<$**schola**“$0 < 4$” und
aus $\in$**schola**“$4 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(4 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 4).$$

`d)`
Aus $<$**schola**“$0 < 5$” und
aus $\in$**schola**“$5 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(5 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 5).$$

`e)`
Aus $<$**schola**“$0 < 6$” und
aus $\in$**schola**“$6 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(6 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 6).$$

`f)`
Aus $<$**schola**“$0 < 7$” und
aus $\in$**schola**“$7 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(7 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 7).$$

`g)`
Aus $<$**schola**“$0 < 8$” und
aus $\in$**schola**“$8 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(8 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 8).$$

`h)`
Aus $<$**schola**“$0 < 9$” und
aus $\in$**schola**“$9 \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(9 \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : 9).$$

`i)`
Aus $<$**schola**“$0 < \mathsf{ten}$” und
aus $\in$**schola**“$\mathsf{ten} \in \mathbb{R}$”
folgt via **324-3**: $$(\mathsf{ten} \cdot x < y) \Leftrightarrow (x < y : \mathsf{ten}).$$

$\square$

324-6. Klarer Weise gilt $0 \leq x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\mathbb{R} \ni -x \leq 0$ und dies ist äquivalent zu $0 \leq -(-x) \in \mathbb{R}$.

324-6(Satz)

a) *"$0 \leq x \in \mathbb{R}$" genau dann, wenn "$\mathbb{R} \ni -x \leq 0$"
genau dann, wenn "$0 \leq -(-x) \in \mathbb{R}$".*

b) *"$0 < x \in \mathbb{R}$" genau dann, wenn "$\mathbb{R} \ni -x < 0$"
genau dann, wenn "$0 < -(-x) \in \mathbb{R}$".*

c) *"$0 \leq x \in \mathbb{S}$" genau dann, wenn "$\mathbb{S} \ni -x \leq 0$"
genau dann, wenn "$0 \leq -(-x) \in \mathbb{S}$".*

d) *"$0 < x \in \mathbb{S}$" genau dann, wenn "$\mathbb{S} \ni -x < 0$"
genau dann, wenn "$0 < -(-x) \in \mathbb{S}$".*

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **324-6** a) $\boxed{\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}}$ VS gleich $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

1.1: Aus VS gleich "$0 \leq x \ldots$"

folgt via **folk**: $\boxed{-x \leq 0}$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"

folgt via **folk**: $\boxed{-x \in \mathbb{R}}$

a) $\boxed{\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}}$ VS gleich $\mathbb{R} \ni -x \leq 0$.

1.1: Aus VS gleich "$\mathbb{R} \ni -x \ldots$"

folgt via **folk**: $\boxed{-(-x) \in \mathbb{R}}$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots -x \leq 0$"

folgt via **folk**: $\boxed{0 \leq -(-x)}$

<u>Beweis **324-6**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \leq -(-x) \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots - (-x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `VS` und
aus `3`
folgt: $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

`b)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"

folgt via **folk**: $\boxed{-x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"

folgt via **folk**: $\boxed{-x \in \mathbb{R}}$

`b)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathbb{R} \ni -x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni -x \ldots$"

folgt via **folk**: $\boxed{-(-x) \in \mathbb{R}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x < 0$"

folgt via **folk**: $\boxed{0 < -(-x)}$

<u>Beweis **324-6**</u> `b)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < -(-x) \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots - (-x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `VS` und
aus `3`
folgt: $0 < x \in \mathbb{R}$.

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \le x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **folk**: $\boxed{-x \le 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $\boxed{-x \in \mathbb{S}}$

`c)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathbb{S} \ni -x \le 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{S} \ni -x \ldots$"
folgt via **folk**: $\boxed{-(-x) \in \mathbb{S}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - x \le 0$"
folgt via **folk**: $\boxed{0 \le -(-x)}$

<u>Beweis</u> **<u>324-6</u>** `c)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 \leq -(-x) \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots -(-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `VS` und
aus `3`
folgt: $0 \leq x \in \mathbb{S}$.

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **folk**: $\boxed{-x < 0}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $\boxed{-x \in \mathbb{S}}$

`d)` $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathbb{S} \ni -x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{S} \ni -x \ldots$"
folgt via **folk**: $\boxed{-(-x) \in \mathbb{S}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -x < 0$"
folgt via **folk**: $\boxed{0 < -(-x)}$

<u>Beweis **324-6**</u> `d)` $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < -(-x) \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots - (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-x) = x$.

`4:` Aus `VS` und
aus `3`
folgt: $0 < x \in \mathbb{S}$.

$\square$

324-7 Offenbar wurde $(\pm\infty) : x$, $0 \neq x \in \mathbb{R}$, noch nicht thematisisert.

324-7(Satz)

a) *Aus* "$0 < x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$(+\infty) : x = +\infty$" *und* "$(-\infty) : x = -\infty$".

b) *Aus* "$\mathbb{R} \ni x < 0$" *folgt* "$(+\infty) : x = -\infty$" *und* "$(-\infty) : x = +\infty$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **324-7**</u> `a)` `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1`"$0 < 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $(+\infty) \cdot (1 : x) = +\infty$.

`2.2:` Aus `1`"$0 < 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $(-\infty) \cdot (1 : x) = -\infty$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt via **folk**: $\boxed{(+\infty) : x = +\infty}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt via **folk**: $\boxed{(-\infty) : x = -\infty}$

`b)` `VS` gleich $\mathbb{R} \ni x < 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathbb{R} \ni x < 0$"
folgt via **folk**: $\mathbb{R} \ni 1 : x < 0$.

`2.1:` Aus `1`"$\mathbb{R} \ni 1 : x < 0$"
folgt via **AAVII**: $(+\infty) \cdot (1 : x) = -\infty$.

`2.2:` Aus `1`"$\mathbb{R} \ni 1 : x < 0$"
folgt via **AAVII**: $(-\infty) \cdot (1 : x) = +\infty$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt via **folk**: $\boxed{(+\infty) : x = -\infty}$

`3.2:` Aus `2.2`
folgt via **folk**: $\boxed{(-\infty) : x = +\infty}$

$\square$

324-8. Es gilt nicht nur $(\pm\infty) : 2 = \pm\infty$.

324-8(Satz)

a) "$(+\infty) : 1 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 1 = -\infty$".

b) "$(+\infty) : 2 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 2 = -\infty$".

c) "$(+\infty) : 3 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 3 = -\infty$".

d) "$(+\infty) : 4 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 4 = -\infty$".

e) "$(+\infty) : 5 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 5 = -\infty$".

f) "$(+\infty) : 6 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 6 = -\infty$".

g) "$(+\infty) : 7 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 7 = -\infty$".

h) "$(+\infty) : 8 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 8 = -\infty$".

i) "$(+\infty) : 9 = +\infty$" *und* "$(-\infty) : 9 = -\infty$".

j) "$(+\infty) : \mathsf{ten} = +\infty$" *und* "$(-\infty) : \mathsf{ten} = -\infty$".

RECH.

Beweis **324-8**

≤-Notation.

---

a)
Aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **324-7**: $((+\infty) : 1 = +\infty) \wedge ((-\infty) : 1 = -\infty)$.

b)
Aus $<$**schola**"$0 < 2$" und
aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **324-7**: $((+\infty) : 2 = +\infty) \wedge ((-\infty) : 2 = -\infty)$.

c)
Aus $<$**schola**"$0 < 3$" und
aus $\in$**schola**"$3 \in \mathbb{R}$"
folgt via **324-7**: $((+\infty) : 3 = +\infty) \wedge ((-\infty) : 3 = -\infty)$.

<u>Beweis **324-8**</u> `d)`
Aus $<$**schola**“$0<4$” und
aus $\in$**schola**“$4\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):4=+\infty)\wedge((-\infty):4=-\infty)$.

`e)`
Aus $<$**schola**“$0<5$” und
aus $\in$**schola**“$5\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):5=+\infty)\wedge((-\infty):5=-\infty)$.

`f)`
Aus $<$**schola**“$0<6$” und
aus $\in$**schola**“$6\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):6=+\infty)\wedge((-\infty):6=-\infty)$.

`g)`
Aus $<$**schola**“$0<7$” und
aus $\in$**schola**“$7\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):7=+\infty)\wedge((-\infty):7=-\infty)$.

`h)`
Aus $<$**schola**“$0<8$” und
aus $\in$**schola**“$8\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):8=+\infty)\wedge((-\infty):8=-\infty)$.

`i)`
Aus $<$**schola**“$0<9$” und
aus $\in$**schola**“$9\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):9=+\infty)\wedge((-\infty):9=-\infty)$.

`j)`
Aus $<$**schola**“$0<\mathsf{ten}$” und
aus $\in$**schola**“$\mathsf{ten}\in\mathbb{R}$”
folgt via **324-7**: $((+\infty):\mathsf{ten}=+\infty)\wedge((-\infty):\mathsf{ten}=-\infty)$.

$\square$

324-9. Die Ungleichung $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$ gilt zumindest für alle $x, y \in \mathbb{S}$.

324-9(Satz)

a) *Aus* "$x, y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$".

b) *Aus* "$x, y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$".

$\leq$.RECH.-**Notation**

<u>Beweis **324-9**</u> `a)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`"$x - y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x - y \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$x - y \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-15**: $0 \leq (x - y) \uparrow 2$.

`6:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via **B**$\uparrow$ 2**F**: $(x - y) \uparrow 2 = (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) - 2 \cdot (x \cdot y)$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $0 \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) - 2 \cdot (x \cdot y)$.

`8:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`9:` Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$" und
aus `8`"$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{R}$.

`10:` Aus `9`"$2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{T}$.

`11:` Aus `7`"$0 \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) - 2 \cdot (x \cdot y)$" und
aus `10`"$2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-13**: $2 \cdot (x \cdot y) \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2)$.

`12:` Aus `11`"$2 \cdot (x \cdot y) \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2)$"
folgt via **324-4**: $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

<u>Beweis **324-9**</u> `b)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{S}$.

`1:` Es gilt: $(x \notin \mathbb{R}) \vee (y \notin \mathbb{R}) \vee (x, y \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-21**: $0 \leq y \uparrow 2 \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \cdot y \leq +\infty$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`3.3:` Aus `2.3`"$0 \leq y \uparrow 2 \ldots$"
folgt via **109-23**: $(+\infty) + y \uparrow 2 = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$"
folgt via **319-3**: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`5:` $(x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2 \stackrel{4}{=} ((+\infty) + y \uparrow 2) : 2 \stackrel{3.3}{=} (+\infty) : 2 \stackrel{\mathbf{324-8}}{=} +\infty$.

`6:` Aus `3.1` und
aus `5`"$(x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2 = \ldots = +\infty$"
folgt: $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

...

<u>Beweis **324-9**</u> `b)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{S}$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-21**: $0 \leq x \uparrow 2 \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1`"$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $x \cdot y \leq +\infty$.

`3.2:` Aus `2.2` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $(y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`3.3:` Aus `2.3`"$0 \leq x \uparrow 2 \ldots$"
folgt via **109-23**: $x \uparrow 2 + (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$(y = +\infty) \vee (y = -\infty)$"
folgt via **319-3**: $y \uparrow 2 = +\infty$.

`5:` $(x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2 \stackrel{4}{=} (x \uparrow 2 + (+\infty)) : 2 \stackrel{3.3}{=} (+\infty) : 2 \stackrel{\mathbf{324-8}}{=} +\infty$.

`6:` Aus `3.1` und
aus `5`"$(x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2 = \ldots = +\infty$"
folgt: $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

`1.3.Fall` $x, y \in \mathbb{R}$.

Aus `1.3.Fall`"$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot y \leq (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) : 2$.

□

Analysis: Dreiecks-Ungleichung|.|. DU|.|.
SSatz Zahlen. SSZ.
$-\mathsf{A}$Satz Zahlen. $-\mathsf{ASZ}$.
$-\mathsf{S}$Satz Zahlen. $-\mathsf{SSZ}$.

Ersterstellung: 08/01/15 **Letzte Änderung: 10/02/15**

325-1. Die klassische Dreiecks-Ungleichung gilt nicht ohne Weiteres.

325-1.Bemerkung

- Die Aussage
“ $|x+y| \le |x| + |y|$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
“ $(x, y$ Zahl$) \Rightarrow (|x+y| \le |x| + |y|)$”
ist nicht ohne Weiters verfügbar.

325-2. Weder gilt $|x+y| \le |x| + |y|$" allgemein noch gilt diese $\le$-Aussage für beliebige Zahlen x, y.

325-2.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = +\infty$.

$\rightarrow$) $y = -\infty$.

Dann folgt:

a) x, y Zahl.

b) $x + y = \mathsf{nan}$.

c) $|x| = +\infty$.

d) $|y| = +\infty$.

e) $|x| + |y| = +\infty$.

f) $|x + y| = \mathsf{nan}$.

g) $\neg(|x+y| \le |x| + |y|)$.

RECH-**Notation**.

325-3. Aus $\sqrt{x} = y$ mit $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ oder $x = \mathcal{U}$ folgt $x = y \uparrow 2$. Ab sofort wird eine bereits mit `A•` gekennzeichnete Aussage nicht mehr in einem letzten Beweis-Schritt wiederholt.

325-3(Satz)

`b)` *Aus* "$\sqrt{x} = y$" *und* "$(x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (x = \mathcal{U})$" *folgt* "$x = y \uparrow 2$".

`c)` *Aus* "f *Funktion*" *und* "$\mathsf{ran}\, f \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" *folgt* "$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} = f(x)$" *und* "$\sqrt{f(x)} \uparrow 2 = f(x)$".

`d)` *Aus* "f *Funktion*" *und* "$\mathsf{ran}\, f = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" *folgt* "$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} = f(x)$" *und* "$\sqrt{f(x)} \uparrow 2 = f(x)$".

`e)` $|x| \cdot |x| = \mathsf{ab2}(x)$.

`f)` $|x| \uparrow 2 = \mathsf{ab2}(x)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **325-3** `a)` `VS` gleich $(\sqrt{x} = y) \wedge ((x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (x = \mathcal{U}))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \vee (x = \mathcal{U})$" folgt via **321-10**: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$.

`2:` Aus `1` und aus `VS` gleich "$\sqrt{x} = y \ldots$" folgt: $y \cdot y = x$.

`3:` Aus `2` folgt: $x = y \cdot y$.

`4:` Via **317-4** gilt: $y \uparrow 2 = y \cdot y$.

`5:` Aus `3` und aus `4` folgt: $x = y \uparrow 2$.

<u>Beweis **325-3**</u> `b) VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`1:` Es gilt: $(x \in \mathsf{dom}\, f) \vee (x \notin \mathsf{dom}\, f)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1.1.Fall` "$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$.

`3:` Aus `1.1.Fall` "$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **0-4**: $f(x) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`4:` Aus 3 "$f(x) \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **321-10**: $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} = f(x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-4**: $f(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2 "$f(x) = \mathcal{U}$"
folgt via **321-10**: $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} = f(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} = f(x)$"

`2:` Via **317-4** gilt: $\sqrt{f(x)} \uparrow 2 = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)}$.

`3:` Aus 2 und
aus `A1`
folgt: $\boxed{\sqrt{f(x)} \uparrow 2 = f(x)}$

Beweis **325-3** `c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, f = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} = f(x)}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `1`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{\sqrt{f(x)} \uparrow 2 = f(x)}$

`de)`

`1.1:` Aus **321-4**"$\mathsf{ab2}$ Funktion" und
aus **321-4**"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \cdot \sqrt{\mathsf{ab2}(x)} = \mathsf{ab2}(x)$.

`1.2:` Aus **321-4**"$\mathsf{ab2}$ Funktion" und
aus **321-4**"$\mathsf{ran}\,(\mathsf{ab2}) = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\sqrt{\mathsf{ab2}(x)} \uparrow 2 = \mathsf{ab2}(x)$.

`2:` Via **321-6** gilt: $|x| = \sqrt{\mathsf{ab2}(x)}$.

`3.d):` Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $|x| \cdot |x| = \mathsf{ab2}(x)$.

`3.e):` Aus `1.2` und
aus `2`
folgt: $|x| \uparrow 2 = \mathsf{ab2}(x)$.

$\square$

325-4. Als beschleunigender Zwischenschritt soll Erwartetes bewiesen werden.

325-4(Satz)

a) *Aus* “$0 \le x, y$” *folgt* “$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$”.

b) *Aus* “$x, y \in \mathbb{S}$” *folgt* “$0 \le x \uparrow 2 + y \uparrow 2$”.

$\le$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-4** a) VS gleich $0 \le x, y$.

1: Aus VS gleich “$0 \le x, y$”
folgt via **317-8**: $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

2: Aus 1“$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **318-14**: $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

b) VS gleich $x, y \in \mathbb{S}$.

1: Aus VS gleich “$x, y \in \mathbb{S}$”
folgt via **323-15**: $0 \le x \uparrow 2, y \uparrow 2$.

2: Aus 1“$0 \le x \uparrow 2, y \uparrow 2$”
folgt via **FS**$\le +$: $0 \le x \uparrow 2 + y \uparrow 2$.

$\square$

325-5. Sind x, y, z, u reelle Zahlen so gilt unter anderem $(x \cdot y) \cdot (z \cdot u) \leq (x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2)$.

325-5(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $x, y, z, u \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot u) \leq ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2) : 2$.

b) $(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2 \leq (x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2)$.

c) $|x \cdot y + z \cdot u| \leq \sqrt{x \uparrow 2 + z \uparrow 2} \cdot \sqrt{y \uparrow 2 + u \uparrow 2}$.

d) $x \cdot y + z \cdot u \leq \sqrt{x \uparrow 2 + z \uparrow 2} \cdot \sqrt{y \uparrow 2 + u \uparrow 2}$.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-5** a)

1.1: Aus $\rightarrow$)"$x \ldots \in \mathbb{R}$" und
aus $\rightarrow$)"$\ldots u \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot u \in \mathbb{R}$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$\ldots y \ldots \in \mathbb{R}$" und
aus $\rightarrow$)"$\ldots z \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot z \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus $\rightarrow$)"$x, y, z, u \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x, y, z, u \in \mathbb{T}$.

2.1: Aus 1.1"$x \cdot u \in \mathbb{R}$" und
aus 1.2"$y \cdot z \in \mathbb{R}$"
folgt via **324-9**: $(x \cdot u) \cdot (y \cdot z) \leq ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2) : 2$.

2.2: Aus 1.3"$x, y, z, u \in \mathbb{T}$"
folgt via **folk**: $(x \cdot u) \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (z \cdot u)$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(x \cdot y) \cdot (z \cdot u) \leq ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2) : 2$.

<u>Beweis **325-5** `b)`</u>

`1.1:` Aus →) “$x, y, z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(x \cdot y) \cdot (z \cdot u) \leq ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2) : 2.$$

`1.2:` Aus →) “$x \ldots \in \mathbb{R}$” und
aus →) “$\ldots u \in \mathbb{R}$”
folgt via **318-9**: $(x \cdot u) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2.$

`1.3:` Aus →) “$\ldots y, z \ldots \in \mathbb{R}$”
folgt via **318-9**: $(y \cdot z) \uparrow 2 = y \uparrow 2 \cdot z \uparrow 2.$

`1.4:` Aus →) “$x, y \ldots \in \mathbb{R}$”
folgt via **318-9**: $(x \cdot y) \uparrow 2 = x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2.$

`1.5:` Aus →) “$\ldots z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via **318-9**: $(z \cdot u) \uparrow 2 = z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2.$

`1.6:` Aus →) “$x, y \ldots \in \mathbb{R}$”
folgt via **·SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}.$

`1.7:` Aus →) “$\ldots z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via **·SZ**: $z \cdot u \in \mathbb{R}.$

`2.1:` Aus `1.1`
folgt via **folk**: $2 \cdot ((x \cdot y) \cdot (z \cdot u)) \leq (x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2.$

`2.2:` Aus `1.6` “$x \cdot y \in \mathbb{R}$” und
aus `1.7` “$z \cdot u \in \mathbb{R}$”
folgt via **B**↑ 2**F**:
$$(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2 = ((x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2) + 2 \cdot ((x \cdot y) \cdot (z \cdot u)).$$

`2.3:` Aus `1.6` “$x \cdot y \in \mathbb{R}$”
folgt via **317-21**: $(x \cdot y) \uparrow 2 \in \mathbb{R}.$

`2.4:` Aus `1.7` “$z \cdot u \in \mathbb{R}$”
folgt via **317-21**: $(z \cdot u) \uparrow 2 \in \mathbb{R}.$

...

<u>Beweis</u> **325-5** `b)` ...

`3:` Aus `2.3`“$(x \cdot y) \uparrow 2 \in \mathbb{R}$” und
aus `2.4`“$(z \cdot u) \uparrow 2 \in \mathbb{R}$”
folgt via **+SZ**: $(x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `2.1`“$2 \cdot ((x \cdot y) \cdot (z \cdot u)) \leq (x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2$” und
aus `3`“$(x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2 \in \mathbb{R}$”
folgt via **VR**$\leq$:
$$((x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2) + 2 \cdot ((x \cdot y) \cdot (z \cdot u)) \leq ((x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2) + ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2).$$

`5:` Aus `2.2` und
aus `4`
folgt:
$$(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2 \leq ((x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2) + ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2).$$

`6:` Aus $\rightarrow)$“$x, y, z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via **317-21**: $x \uparrow 2, y \uparrow 2, z \uparrow 2, u \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `6`“$x \uparrow 2, \ldots, z \uparrow 2, \ldots \in \mathbb{R}$” und
aus `6`“$\ldots y \uparrow 2, \ldots, u \uparrow 2 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**:
$$(x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2) = (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + (z \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2).$$

`8:`
$$\begin{aligned}
&((x \cdot y) \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2) + ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2)\\
&\overset{1.4}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + (z \cdot u) \uparrow 2) + ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2)\\
&\overset{1.5}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + ((x \cdot u) \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2)\\
&\overset{1.2}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + (x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2 + (y \cdot z) \uparrow 2)\\
&\overset{1.3}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + (x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2 + y \uparrow 2 \cdot z \uparrow 2)\\
&\overset{\mathbf{103-6}}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + (z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2 + y \uparrow 2 \cdot z \uparrow 2)\\
&\overset{\mathbf{FSA}}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + (y \uparrow 2 \cdot z \uparrow 2 + z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2)\\
&\overset{\mathbf{KGM}}{=} (x \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + x \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2) + (z \uparrow 2 \cdot y \uparrow 2 + z \uparrow 2 \cdot u \uparrow 2)\\
&\overset{7}{=} (x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2).
\end{aligned}$$

`9:` Aus `5` und
aus `8`
folgt: $(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2 \leq (x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2)$.

<u>Beweis **325-5** `c)`</u>

`1.1:` Aus →) “$x, y, z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2 \le (x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2).$$

`1.2:` Aus →) “$x, y \ldots \in \mathbb{R}$”
folgt via ·**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus →) “$\ldots z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via ·**SZ**: $z \cdot u \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.2`“$x \cdot y \in \mathbb{R}$” und
aus `1.3`“$z \cdot u \in \mathbb{R}$”
folgt via +**SZ**: $x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`“$x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{R}$”
folgt via ∧**SZ**: $x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`“$x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{S}$”
folgt via **323-15**: $0 \le (x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2$.

`5:` Aus `4`“$0 \le (x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2$” und
aus `1.1`“$(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2 \le (x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2)$”
folgt via **323-34**:
$$0 \le \sqrt{(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2} \le \sqrt{(x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2)}.$$

`6:` Aus `3`“$x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{S}$”
folgt via ∧**SZ**: $x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `6`“$x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{T}$”
folgt via **321-8**: $|x \cdot y + z \cdot u| = \sqrt{(x \cdot y + z \cdot u) \uparrow 2}$.

`8:` Aus `7` und
aus `5`
folgt: $|x \cdot y + z \cdot u| \le \sqrt{(x \uparrow 2 + z \uparrow 2) \cdot (y \uparrow 2 + u \uparrow 2)}$.

`9.1:` Aus →) “$x, y \ldots \in \mathbb{R}$”
folgt via ∧**SZ**: $x, y \in \mathbb{S}$.

`9.2:` Aus →) “$\ldots z, u \in \mathbb{R}$”
folgt via ∧**SZ**: $z, u \in \mathbb{S}$.

`10.1:` Aus `9.1`“$x, y \in \mathbb{S}$”
folgt via **325-4**: $0 \le x \uparrow 2 + y \uparrow 2$.

`10.2:` Aus `9.2`“$z, u \in \mathbb{S}$”
folgt via **325-4**: $0 \le z \uparrow 2 + u \uparrow 2$.

...

Beweis **325-5** `c)` ...

`11:` Aus `10.1`"$0 \leq x \uparrow 2 + y \uparrow 2$" und
aus `10.2`"$0 \leq z \uparrow 2 + u \uparrow 2$"
folgt via **325-4**:
$$\sqrt{(x \uparrow 2 + y \uparrow 2) \cdot (z \uparrow 2 + u \uparrow 2)} = \sqrt{x \uparrow 2 + y \uparrow 2} \cdot \sqrt{z \uparrow 2 + u \uparrow 2}.$$

`12:` Aus `8` und
aus `11`
folgt: $|x \cdot y + z \cdot u| \leq \sqrt{x \uparrow 2 + y \uparrow 2} \cdot \sqrt{z \uparrow 2 + u \uparrow 2}.$

`d)`

`1.1:` Aus →)"$x, y, z, u \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$|x \cdot y + z \cdot u| \leq \sqrt{x \uparrow 2 + y \uparrow 2} \cdot \sqrt{z \uparrow 2 + u \uparrow 2}.$$

`1.2:` Aus →)"$x, y \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via ·**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}.$

`1.3:` Aus →)"$\ldots z, u \in \mathbb{R}$"
folgt via ·**SZ**: $z \cdot u \in \mathbb{R}.$

`2:` Aus `1.2`"$x \cdot y \in \mathbb{R}$" und
aus `1.3`"$z \cdot u \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{R}.$

`3:` Aus `2`"$x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{R}$"
folgt via ∧**SZ**: $x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{S}.$

`4:` Aus `3`"$x \cdot y + z \cdot u \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-32**: $x \cdot y + z \cdot u \leq |x \cdot y + z \cdot u|.$

`5:` Aus `4`"$x \cdot y + z \cdot u \leq |x \cdot y + z \cdot u|$" und
aus `1.1`"$|x \cdot y + z \cdot u| \leq \sqrt{x \uparrow 2 + y \uparrow 2} \cdot \sqrt{z \uparrow 2 + u \uparrow 2}$"
folgt via **folk**: $x \cdot y + z \cdot u \leq \sqrt{x \uparrow 2 + y \uparrow 2} \cdot \sqrt{z \uparrow 2 + u \uparrow 2}.$

□

325-6. Aus $x + y \in \mathbb{B}$ folgt $x, y \in \mathbb{B}$. Gilt $x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$, so folgt $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$ oder $y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$. Konsequenter Weise folgen aus $|x + y| = +\infty$ die Aussagen $(|x| = +\infty) \vee (|y| = +\infty)$ und $|x| + |y| = +\infty$.

325-6(Satz)

a) *Aus* "$x + y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x, y \in \mathbb{B}$".

b) *Aus* "$x + y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$" *folgt* "$(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$".

c) *Aus* "$|x + y| = +\infty$"
folgt "$(|x| = +\infty) \vee (|y| = +\infty)$" *und* "$|x| + |y| = +\infty$".

d) $|x| \uparrow 2 = (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2$.

e) *Aus* "$x < y$" *folgt* "$+\infty \neq x \in \mathbb{S}$" *und* "$-\infty \neq y \in \mathbb{S}$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **325-6** `a)` `VS` gleich $x+y\in\mathbb{B}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x+y\in\mathbb{B}$"
folgt via **ElementAxiom**: $x+y$ Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x+y\in\mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}(x+y),\mathsf{Im}(x+y)\in\mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x+y$ Menge"
folgt via **96-13**: x,y Zahl.

`2.2:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Re}(x+y)=(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

`2.3:` Via **96-25** gilt: $\mathsf{Im}(x+y)=(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)$.

`3.1:` Aus `2.1`"x,y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x,\mathsf{Re}y,\mathsf{Im}x,\mathsf{Im}y\in\mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{Re}(x+y)\ldots\in\mathbb{S}$" und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `1.2`"$\ldots\mathsf{Im}(x+y)\in\mathbb{S}$" und
aus `2.3`
folgt: $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{S}$.

`4.1:` Aus `3.2`"$(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{S}$" und
aus `3.1`"$\mathsf{Re}x,\mathsf{Re}y\ldots\in\mathbb{T}$"
folgt via **109-4**: $\mathsf{Re}x,\mathsf{Re}y\in\mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `3.3`"$(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)\in\mathbb{S}$" und
aus `3.1`"$\ldots\mathsf{Im}x,\mathsf{Im}y\in\mathbb{T}$"
folgt via **109-4**: $\mathsf{Im}x,\mathsf{Im}y\in\mathbb{S}$.

`5.1:` Aus `4.1`"$\mathsf{Re}x\ldots\in\mathbb{S}$" und
aus `4.2`"$\mathsf{Im}x\ldots\in\mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $\boxed{x\in\mathbb{B}}$

`5.2:` Aus `4.1`"$\ldots\mathsf{Re}y\in\mathbb{S}$" und
aus `4.2`"$\ldots\mathsf{Im}y\in\mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $\boxed{y\in\mathbb{B}}$

<u>Beweis **325-6**</u> `b)` `VS` gleich $x+y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x+y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $(x+y \in \mathbb{B}) \wedge (x+y \notin \mathbb{C})$.

`2:` Aus `1`"$x+y \in \mathbb{B} \dots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x, y \in \mathbb{B}$.

`3.1:` Es gilt: $(x, y \in \mathbb{C}) \vee (\neg(x, y \in \mathbb{C}))$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $x, y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3.1.1.Fall`"$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via +**SZ**: $x+y \in \mathbb{C}$.

`5:` Via `1` gilt: $x+y \notin \mathbb{C}$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$\neg(x, y \in \mathbb{C})$"

`3.2:` Aus `2`"$x, y \in \mathbb{B}$" und
aus `A1` gleich "$\neg(x, y \in \mathbb{C})$"
folgt: $(x, y \in \mathbb{B}) \wedge ((x \notin \mathbb{C}) \vee (y \notin \mathbb{C}))$.

`4:` Aus `3.2`
folgt: $((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})) \vee ((y \in \mathbb{B}) \wedge (y \notin \mathbb{C}))$.

`5.1:` Via **folk** gilt: $((x \in \mathbb{B}) \wedge (x \notin \mathbb{C})) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`5.2:` Via **folk** gilt: $((y \in \mathbb{B}) \wedge (y \notin \mathbb{C})) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

`6:` Aus `4`,
aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) \vee (y \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C})$.

Beweis **325-6** `c)` `VS` gleich $|x+y|=+\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$|x+y|=+\infty$"
folgt via **321-28**: $x+y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1` "$x+y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $x+y\in\mathbb{B}$.

`2.2:` Aus `1` "$x+y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})\vee(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})$.

`3.1:` Aus `2.1` "$x+y\in\mathbb{B}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x,y\in\mathbb{B}$.

`3.2:` Via **321-28** gilt: $(x\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})\Leftrightarrow(|x|=+\infty)$.

`3.3:` Via **321-28** gilt: $(y\in\mathbb{B}\setminus\mathbb{C})\Leftrightarrow(|y|=+\infty)$.

`4.1:` Aus `3.1` "$x,y\in\mathbb{B}$"
folgt via **321-28**: $0\le|x|,|y|\in\mathbb{S}$.

`4.2:` Aus `2.2`,
aus `3.2` und
aus `3.3`

folgt: $\boxed{(|x|=+\infty)\vee(|y|=+\infty)}$

...

Beweis **325-6** `c)` `VS` gleich $|x+y| = +\infty.$

...

`Fallunterscheidung`

`4.2.1.Fall` $|x| = +\infty.$

`5:` Aus `4.1`"$0 \le \ldots |y| \ldots$"
folgt via **109-23**: $(+\infty) + |y| = +\infty.$

`6:` Aus `5` und
aus `4.2.1.Fall`
folgt: $|x| + |y| = +\infty.$

`4.2.2.Fall` $|y| = +\infty.$

`5:` Aus `4.2`"$0 \le |x| \ldots$"
folgt via **109-23**: $|x| + (+\infty) = +\infty.$

`6:` Aus `5` und
aus `4.2.2.Fall`
folgt: $|x| + |y| = +\infty.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{|x| + |y| = +\infty}$

`d)`

$$|x| \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{325-3}}{=} \mathsf{ab2}(x) \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$
$$\stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} (\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2.$$

<u>Beweis</u> **325-6** `e)` `VS` gleich $x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2.1:` Aus `1.1`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$"
folgt via **107-11**: $\boxed{+\infty \neq x \in \mathbb{S}}$

`2.2:` Aus `1.2`"$(x \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$"
folgt via **107-10**: $\boxed{-\infty \neq y \in \mathbb{S}}$

$\square$

325-7. Für $\S = 0, \ldots, \mathsf{ten}$ gilt $\S \cdot (x+y) = \S \cdot x + \S \cdot y = (x+y) \cdot \S$.

325-7(Satz)

a) $0 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$.

b) $1 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y$.

c) $2 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 2 = 2 \cdot x + 2 \cdot y$.

d) $3 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 3 = 3 \cdot x + 3 \cdot y$.

e) $4 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 4 = 4 \cdot x + 4 \cdot y$.

f) $5 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 5 = 5 \cdot x + 5 \cdot y$.

g) $6 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 6 = 6 \cdot x + 6 \cdot y$.

h) $7 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 7 = 7 \cdot x + 7 \cdot y$.

i) $8 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 8 = 8 \cdot x + 8 \cdot y$.

j) $9 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 9 = 9 \cdot x + 9 \cdot y$.

k) $\mathsf{ten} \cdot (x+y) = (x+y) \cdot \mathsf{ten} = \mathsf{ten} \cdot x + \mathsf{ten} \cdot y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **325-7** a)

1.1: Via **KGM** gilt: $\boxed{0 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 0}$

1.2: Aus ∈**schola**“$0 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{0 \cdot (x+y) = 0 \cdot x + 0 \cdot y}$

b)

1.1: Via **KGM** gilt: $\boxed{1 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 1}$

1.2: Aus ∈**schola**“$1 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{1 \cdot (x+y) = 1 \cdot x + 1 \cdot y}$

<u>Beweis **325-7**</u> `c)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{2 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 2}$

`1.2:` Aus ∈**schola**“$2 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{2 \cdot (x+y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y}$

`d)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{3 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 3}$

`1.2:` Aus ∈**schola**“$3 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{3 \cdot (x+y) = 3 \cdot x + 3 \cdot y}$

`e)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{4 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 4}$

`1.2:` Aus ∈**schola**“$4 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{4 \cdot (x+y) = 4 \cdot x + 4 \cdot y}$

`f)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{5 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 5}$

`1.2:` Aus ∈**schola**“$5 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{5 \cdot (x+y) = 5 \cdot x + 5 \cdot y}$

<u>Beweis **325-7**</u> `g)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{6 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 6}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$6 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{6 \cdot (x+y) = 6 \cdot x + 6 \cdot y}$

`h)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{7 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 7}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$7 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{7 \cdot (x+y) = 7 \cdot x + 7 \cdot y}$

`i)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{8 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 8}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$8 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{8 \cdot (x+y) = 8 \cdot x + 8 \cdot y}$

`j)`

`1.1:` Via **KGM** gilt: $\boxed{9 \cdot (x+y) = (x+y) \cdot 9}$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$9 \in \mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $\boxed{9 \cdot (x+y) = 9 \cdot x + 9 \cdot y}$

Beweis **325-7** `k)`

`1.1:` Via **KGM** gilt:

$$\boxed{\mathsf{ten}\cdot(x+y)=(x+y)\cdot\mathsf{ten}}$$

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$\mathsf{ten}\in\mathbb{R}$”

folgt via **DG**$\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathsf{ten}\cdot(x+y)=\mathsf{ten}\cdot x+\mathsf{ten}\cdot y}$$

$\square$

325-8. Einige Ergänzungen zum Produkt $(+\infty)\cdot x$ erhöhen die Aufmerksamkeit.

325-8(Satz)

a) *"$(+\infty)\cdot x\in\mathbb{T}$" genau dann, wenn "$x\in\mathbb{T}$".*

b) *"$(+\infty)\cdot x\in\mathbb{S}$" genau dann, wenn "$x\in\mathbb{S}$".*

c) *Aus "$+\infty\neq(+\infty)\cdot x\in\mathbb{S}$" folgt "$x\le 0$".*

d) *Aus "$-\infty\neq(+\infty)\cdot x\in\mathbb{S}$" folgt "$0\le x$".*

e) *Aus "$y<(+\infty)\cdot x$" folgt "$0\le x$".*

f) *Aus "$(+\infty)\cdot x<y$" folgt "$x\le 0$".*

$\le$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-8** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(+\infty)\cdot x\in\mathbb{T}$.
Aus **95-7**"$0\neq+\infty$",
aus **95-12**"$+\infty\in\mathbb{T}$" und
aus VS gleich "$(+\infty)\cdot x\in\mathbb{T}$"
folgt via **131-1**: $x\in\mathbb{T}$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x\in\mathbb{T}$.
Aus **95-12**"$+\infty\in\mathbb{T}$" und
aus VS gleich "$x\in\mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(+\infty)\cdot x\in\mathbb{T}$.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $(+\infty)\cdot x\in\mathbb{S}$.
Aus **95-7**"$0\neq+\infty$",
aus **95-12**"$+\infty\in\mathbb{T}$" und
aus VS gleich "$(+\infty)\cdot x\in\mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $x\in\mathbb{S}$.

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x\in\mathbb{S}$.
Aus **95-12**"$+\infty\in\mathbb{S}$" und
aus VS gleich "$x\in\mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(+\infty)\cdot x\in\mathbb{S}$.

Beweis **325-8** `c)` `VS` gleich $+\infty \neq (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(x \leq 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \leq 0$.

`2.2.Fall` $0 < x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 < x$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot x = +\infty$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$+\infty \neq (+\infty) \cdot x \ldots$"
folgt: $+\infty \neq +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq 0$.

`d)` `VS` gleich $-\infty \neq (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < 0$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot x = -\infty$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$-\infty \neq (+\infty) \cdot x \ldots$"
folgt: $-\infty \neq -\infty$.

`2.2.Fall` $0 \leq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq x$.

<u>Beweis **325-8**</u> `e)` `VS` gleich $y < (+\infty) \cdot x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$y < (+\infty) \cdot x$"
folgt via **325-6**: $-\infty \neq (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1`"$-\infty \neq (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 \leq x.$

`f)` `VS` gleich $(+\infty) \cdot x < y.$

`1:` Aus `VS` gleich "$(+\infty) \cdot x < y$"
folgt via **325-6**: $+\infty \neq (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `1`"$+\infty \neq (+\infty) \cdot x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \leq 0.$

325-9. Falls $0 < a$ und $a \cdot x < a \cdot y$, dann $x < y$.

325-9(Satz)

a) *Aus* "$0 < a \in \mathbb{R}$" *und* "$a \cdot x \leq a \cdot y$" *folgt* "$x \leq y$".

b) *Aus* "$0 < a \in \mathbb{R}$" *und* "$a \cdot x < a \cdot y$" *folgt* "$x < y$".

c) *Aus* "$0 < a$" *und* "$a \cdot x < a \cdot y$" *folgt* "$x < y$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-9** a) VS gleich $(0 < a \in \mathbb{R}) \wedge (a \cdot x \leq a \cdot y)$.

1.1: Aus VS gleich "$0 < a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $0 < 1 : a \in \mathbb{R}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots a \cdot x \leq a \cdot y$"
folgt via **folk**: $a \cdot x, a \cdot y \in \mathbb{S}$.

1.3: Aus VS gleich "$0 < a \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq a$.

1.4: Aus VS gleich "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $a \in \mathbb{T}$.

2.1: Aus 1.1"$0 < 1 : a \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq 1 : a$.

2.2: Aus 1.3"$0 \neq a$",
aus 1.4"$a \in \mathbb{T}$" und
aus 1.2"$a \cdot x \ldots \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $x \in \mathbb{S}$.

2.3: Aus 1.3"$0 \neq a$",
aus 1.4"$a \in \mathbb{T}$" und
aus 1.2"$\ldots a \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via **131-1**: $y \in \mathbb{S}$.

...

<u>Beweis **325-9**</u> `a)` `VS` gleich $(0 < a \in \mathbb{R}) \wedge (a \cdot x \leq a \cdot y)$.

...

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \cdot x \leq a \cdot y$" und
aus `2.1`"$0 \leq 1 : a$"
folgt via **folk**: $(1 : a) \cdot (a \cdot x) \leq (1 : a) \cdot (a \cdot y)$.

`3.2:` Aus `2.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3.3:` Aus `2.3`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3`
folgt via **folk**: $(a \cdot x) : a \leq (a \cdot y) : a$.

`5.1:` Aus `1.3`"$0 \neq a$",
aus `1.4`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **DKR**$\mathbb{T}$: $(a \cdot x) : a = x$.

`5.2:` Aus `1.3`"$0 \neq a$",
aus `1.4`"$a \in \mathbb{T}$" und
aus `3.3`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **DKR**$\mathbb{T}$: $(a \cdot y) : a = y$.

`6:` Aus `4`,
aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $x \leq y$.

<u>Beweis **325-9**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < a \in \mathbb{R}) \wedge (a \cdot x < a \cdot y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \cdot x < a \cdot y$"
folgt via **41-3**: $a \cdot x \leq a \cdot y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < a \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1`"$a \cdot x \leq a \cdot y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \leq y$.

`3:` Aus `2`"$x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x < y$.

`3.2.Fall` $x = y$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$x = y$"
folgt: $a \cdot x = a \cdot y$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \cdot x < a \cdot y$"
folgt via **41-3**: $a \cdot x \neq a \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x < y$.

Beweis **325-9** `c)` `VS` gleich $(0 < a) \wedge (a \cdot x < a \cdot y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < a \ldots$"
folgt via **107-16**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$0 < a \ldots$",
aus `1.1.Fall` "$a \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \cdot x < a \cdot y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x < y$.

`1.2.Fall` $a = +\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots a \cdot x < a \cdot y$"
folgt: $(+\infty) \cdot x < (+\infty) \cdot y$.

`3.1:` Aus `2` "$(+\infty) \cdot x < (+\infty) \cdot y$"
folgt via **325-8**: $x \leq 0$.

`3.2:` Aus `2` "$(+\infty) \cdot x < (+\infty) \cdot y$"
folgt via **325-8**: $0 \leq y$.

`4:` Aus `3.1` "$x \leq 0$" und
aus `3.2` "$0 \leq y$"
folgt via **folk**: $x \leq y$.

`5:` Aus `4` "$x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $x < y$.

`5.2.Fall` $x = y$.

`6:` Aus `5.2.Fall` "$x = y$"
folgt: $a \cdot x = a \cdot y$.

`7:` Aus `VS` gleich "$\ldots a \cdot x < a \cdot y$"
folgt via **41-3**: $a \cdot x \neq a \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x < y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x < y$.

□

325-10. Für $\S = 1, \ldots, \mathsf{ten}$ gilt $x \le y$ genau dann, wenn $\S \cdot x \le \S \cdot y$.

325-10(Satz)

a) *“$1 \cdot x \le 1 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

b) *“$2 \cdot x \le 2 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

c) *“$3 \cdot x \le 3 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

d) *“$4 \cdot x \le 4 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

e) *“$5 \cdot x \le 5 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

f) *“$6 \cdot x \le 6 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

g) *“$7 \cdot x \le 7 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

h) *“$8 \cdot x \le 8 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

i) *“$9 \cdot x \le 9 \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

j) *“$\mathsf{ten} \cdot x \le \mathsf{ten} \cdot y$” genau dann, wenn “$x \le y$”.*

$\le$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-10** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $1 \cdot x \le 1 \cdot y$.

Aus $<$**schola**“$0 < 1$”,
aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{R}$” und
aus VS gleich “$1 \cdot x \le 1 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x \le y$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x \le y$.

Aus VS gleich “$x \le y$” und
aus $\le$**schola**“$0 \le 1$”
folgt via **folk**: $1 \cdot x \le 1 \cdot y$.

<u>Beweis **325-10**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $2 \cdot x \le 2 \cdot y$.
Aus $<$**schola**"$0 < 2$",
aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$2 \cdot x \le 2 \cdot y$"
folgt via **325-9**: $x \le y$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \le y$.
Aus `VS` gleich "$x \le y$" und
aus $\le$**schola**"$0 \le 2$"
folgt via **folk**: $2 \cdot x \le 2 \cdot y$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $3 \cdot x \le 3 \cdot y$.
Aus $<$**schola**"$0 < 3$",
aus $\in$**schola**"$3 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$3 \cdot x \le 3 \cdot y$"
folgt via **325-9**: $x \le y$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \le y$.
Aus `VS` gleich "$x \le y$" und
aus $\le$**schola**"$0 \le 3$"
folgt via **folk**: $3 \cdot x \le 3 \cdot y$.

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $4 \cdot x \le 1 \cdot y$.
Aus $<$**schola**"$0 < 4$",
aus $\in$**schola**"$4 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$4 \cdot x \le 4 \cdot y$"
folgt via **325-9**: $x \le y$.

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \le y$.
Aus `VS` gleich "$x \le y$" und
aus $\le$**schola**"$0 \le 4$"
folgt via **folk**: $4 \cdot x \le 4 \cdot y$.

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $5 \cdot x \le 5 \cdot y$.
Aus $<$**schola**"$0 < 5$",
aus $\in$**schola**"$5 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$5 \cdot x \le 5 \cdot y$"
folgt via **325-9**: $x \le y$.

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \le y$.
Aus `VS` gleich "$x \le y$" und
aus $\le$**schola**"$0 \le 5$"
folgt via **folk**: $5 \cdot x \le 5 \cdot y$.

Beweis **325-10** `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $6 \cdot x \leq 6 \cdot y$.
Aus $<$**schola**“$0 < 6$” ,
aus $\in$**schola**“$6 \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$6 \cdot x \leq 6 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x \leq y$.

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \leq y$.
Aus `VS` gleich “$x \leq y$” und
aus $\leq$**schola**“$0 \leq 6$”
folgt via **folk**: $6 \cdot x \leq 6 \cdot y$.

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $7 \cdot x \leq 7 \cdot y$.
Aus $<$**schola**“$0 < 7$” ,
aus $\in$**schola**“$7 \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$7 \cdot x \leq 7 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x \leq y$.

`g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \leq y$.
Aus `VS` gleich “$x \leq y$” und
aus $\leq$**schola**“$0 \leq 7$”
folgt via **folk**: $7 \cdot x \leq 7 \cdot y$.

`h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $8 \cdot x \leq 8 \cdot y$.
Aus $<$**schola**“$0 < 8$” ,
aus $\in$**schola**“$8 \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$8 \cdot x \leq 8 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x \leq y$.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \leq y$.
Aus `VS` gleich “$x \leq y$” und
aus $\leq$**schola**“$0 \leq 8$”
folgt via **folk**: $8 \cdot x \leq 8 \cdot y$.

`i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $9 \cdot x \leq 9 \cdot y$.
Aus $<$**schola**“$0 < 9$” ,
aus $\in$**schola**“$9 \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$9 \cdot x \leq 9 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x \leq y$.

`i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \leq y$.
Aus `VS` gleich “$x \leq y$” und
aus $\leq$**schola**“$0 \leq 9$”
folgt via **folk**: $9 \cdot x \leq 9 \cdot y$.

<u>Beweis **325-10**</u> `j)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\mathsf{ten} \cdot x \le \mathsf{ten} \cdot y$.

Aus $<$**schola**“$0 < \mathsf{ten}$” ,
aus $\in$**schola**“$\mathsf{ten} \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{ten} \cdot x \le \mathsf{ten} \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x \le y$.

`j)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x \le y$.

Aus `VS` gleich “$x \le y$” und
aus $\le$**schola**“$0 \le \mathsf{ten}$”
folgt via **folk**: $\mathsf{ten} \cdot x \le \mathsf{ten} \cdot y$.

$\square$

325-11. Für $\S = 1, \ldots, \mathsf{ten}$ gilt $x < y$ genau dann, wenn $\S \cdot x < \S \cdot y$.

325-11(Satz)

a) *"$1 \cdot x < 1 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

b) *"$2 \cdot x < 2 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

c) *"$3 \cdot x < 3 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

d) *"$4 \cdot x < 4 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

e) *"$5 \cdot x < 5 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

f) *"$6 \cdot x < 6 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

g) *"$7 \cdot x < 7 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

h) *"$8 \cdot x < 8 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

i) *"$9 \cdot x < 9 \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

j) *"$\mathsf{ten} \cdot x < \mathsf{ten} \cdot y$" genau dann, wenn "$x < y$".*

$<$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-11** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $1 \cdot x < 1 \cdot y$.
Aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus VS gleich "$1 \cdot x < 1 \cdot y$"
folgt via **325-9**: $x < y$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $x < y$.
Aus VS gleich "$x < y$",
aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $1 \cdot x < 1 \cdot y$.

<u>Beweis **359-11**</u> `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $2 \cdot x < 2 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 2$” und
aus `VS` gleich “$2 \cdot x < 2 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 2$” und
aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $2 \cdot x < 2 \cdot y.$

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $3 \cdot x < 3 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 3$” und
aus `VS` gleich “$3 \cdot x < 3 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 3$” und
aus $\in$**schola**“$3 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $3 \cdot x < 3 \cdot y.$

`d)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $4 \cdot x < 4 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 4$” und
aus `VS` gleich “$4 \cdot x < 4 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`d)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 4$” und
aus $\in$**schola**“$4 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $4 \cdot x < 4 \cdot y.$

`e)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $5 \cdot x < 5 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 5$” und
aus `VS` gleich “$5 \cdot x < 5 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`e)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 5$” und
aus $\in$**schola**“$5 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $5 \cdot x < 5 \cdot y.$

<u>Beweis **359-11**</u> `f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $6 \cdot x < 6 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 6$” und
aus `VS` gleich “$6 \cdot x < 6 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 6$” und
aus $\in$**schola**“$6 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $6 \cdot x < 6 \cdot y.$

`g)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $7 \cdot x < 7 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 7$” und
aus `VS` gleich “$7 \cdot x < 7 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`g)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 7$” und
aus $\in$**schola**“$7 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $7 \cdot x < 7 \cdot y.$

`h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $8 \cdot x < 8 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 8$” und
aus `VS` gleich “$8 \cdot x < 8 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 8$” und
aus $\in$**schola**“$8 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $8 \cdot x < 8 \cdot y.$

`i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $9 \cdot x < 9 \cdot y.$

Aus $<$**schola**“$0 < 9$” und
aus `VS` gleich “$9 \cdot x < 9 \cdot y$”
folgt via **325-9**: $x < y.$

`i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x < y.$

Aus `VS` gleich “$x < y$”,
aus $<$**schola**“$0 < 9$” und
aus $\in$**schola**“$9 \in \mathbb{R}$”
folgt via **folk**: $9 \cdot x < 9 \cdot y.$

<u>Beweis **359-11**</u> `j)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $\mathsf{ten} \cdot x < \mathsf{ten} \cdot y$.

Aus $<$**schola**"$0 < \mathsf{ten}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{ten} \cdot x < \mathsf{ten} \cdot y$"
folgt via **325-9**: $x < y$.

`j)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $x < y$.

Aus `VS` gleich "$x < y$",
aus $<$**schola**"$0 < \mathsf{ten}$" und
aus $\in$**schola**"$\mathsf{ten} \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $\mathsf{ten} \cdot x < \mathsf{ten} \cdot y$.

$\square$

325-12. Interessanter Weise gilt $0 \leq |x| \uparrow 2$ genau dann, wenn $0 \leq |x|$ und dies gilt genau dann, wenn $x \in \mathbb{B}$.

325-12(Satz) *Die Aussagen* `i),ii),iii)` *sind äqunivalent:*

`i)` $0 \leq |x| \uparrow 2$.

`ii)` $0 \leq |x|$.

`iii)` $x \in \mathbb{B}$.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **325-12** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \leq |x| \uparrow 2$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq |x| \uparrow 2$"
folgt via **323-15**: $|x| \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$|x| \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-28**: $0 \leq |x|$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \leq |x|$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq |x|$"
folgt via **folk**: $|x| \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$|x| \in \mathbb{S}$"
folgt via **321-28**: $x \in \mathbb{B}$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **321-28**: $|x| \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$|x| \in \mathbb{S}$"
folgt via **323-15**: $0 \leq |x| \uparrow 2$.

□

325-13. Die Dreiecks-Ungleichung $|.|$ gilt auf jeden Fall in $\mathbb{C}$.

<u>**325-13(Satz)**</u>

Aus "$x, y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$|x + y| \leq |x| + |y|$".

<u>$\leq$.`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **325-13**</u> `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

<u>`REIM`-**Notation**</u>.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}x, \mathsf{Re}y, \mathsf{Im}x, \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x, \mathsf{Re}y \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via **B**$\uparrow$ 2**F**:
$$((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) \uparrow 2 = ((\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Re}y) \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \mathsf{Im}x, \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **B**$\uparrow$ 2**F**:
$$((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) \uparrow 2 = ((\mathsf{Im}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

...

Beweis **325-13** VS gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

...

3: $|x+y| \uparrow 2 \overset{\mathbf{325-6}}{=} (\mathsf{Re}(x+y)) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}(x+y)) \uparrow 2$

$$\overset{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}(x+y)) \uparrow 2$$

$$\overset{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) \uparrow 2 + ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) \uparrow 2$$

$$\overset{2.1}{=} (((\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Re}y) \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) + ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) \uparrow 2$$

$$\overset{2.2}{=} (((\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Re}y) \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) \\ +(((\mathsf{Im}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$

$$\overset{\mathbf{103-6}}{=} (((\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Re}y) \uparrow 2) + ((\mathsf{Im}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2)) \\ +(2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$

$$\overset{\mathbf{103-6}}{=} (((\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2) + ((\mathsf{Re}y) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2)) \\ +(2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$

$$\overset{\mathbf{325-6}}{=} (|x| \uparrow 2 + ((\mathsf{Re}y) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2)) \\ +(2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$

$$\overset{\mathbf{325-6}}{=} (|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) \\ +(2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$

$$= (|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + (2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + 2 \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$

$$\overset{\mathbf{325-7}}{=} (|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

4: Aus 1“$\mathsf{Re}x, \mathsf{Re}y, \mathsf{Im}x, \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **325-5**:
$$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \\ \leq \sqrt{(\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2} \cdot \sqrt{(\mathsf{Re}y) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2}.$$

5.1: Via **321-6** gilt: $\sqrt{(\mathsf{Re}x) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}x) \uparrow 2} = |x|$.

5.2: Via **321-6** gilt: $\sqrt{(\mathsf{Re}y) \uparrow 2 + (\mathsf{Im}y) \uparrow 2} = |y|$.

6: Aus 4,
aus 5.1 und
aus 5.2
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \leq |x| \cdot |y|$.

7: Aus 6
folgt via **325-10**: $2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \leq 2 \cdot (|x| \cdot |y|)$.

...

<u>Beweis **325-13**</u> `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

...

`8`: Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **321-28** $|x|, |y| \in \mathbb{R}$.

`9.1`: Aus `8`"$|x|, |y| \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-21**: $|x| \uparrow 2, |y| \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

`9.2`: Aus `8`"$|x|, |y| \in \mathbb{R}$"
folgt via **B**$\uparrow$ 2**F**: $(|x| + |y|) \uparrow 2 = (|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + 2 \cdot (|x| \cdot |y|)$.

`10`: Aus `9.1`"$|x| \uparrow 2, |y| \uparrow 2 \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

`11`: Aus `7`"$2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \leq 2 \cdot (|x| \cdot |y|)$" und
aus `10`"$|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**$\leq$:
$$(|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \leq (|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + 2 \cdot (|x| \cdot |y|).$$

`12`: Aus `11` und
aus `9.2`
folgt: $(|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \leq (|x| + |y|) \uparrow 2$.

`13`: Aus `3`"$|x + y| \uparrow 2 = \ldots = (|x| \uparrow 2 + |y| \uparrow 2) + 2 \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))$" und
aus `12`
folgt: $|x + y| \uparrow 2 \leq (|x| + |y|) \uparrow 2$.

`14.1`: Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + y \in \mathbb{C}$.

`14.2`: Aus `8`"$|x|, |y| \in \mathbb{R}$"
folgt via **321-28**: $0 \leq |x|, |y|$.

`15.1`: Aus `14.1`"$x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via **321-28**: $0 \leq |x + y|$.

`15.2`: Aus `14.2`"$0 \leq |x|, |y|$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 \leq |x| + |y|$.

`16`: Aus `13`"$|x + y| \uparrow 2 \leq (|x| + |y|) \uparrow 2$",
aus `15.1`"$0 \leq |x + y|$" und
aus `15.2`"$0 \leq |x| + |y|$"
folgt via **323-16**: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$\square$

325-14. Dass es in der Tat ein derartig einfaches Kriterium für die Gültigkeit von $|x+y| \leq |x|+|y|$ gibt, enthüllte sich erst durch die Arbeit am LW.

325-14(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $|x+y| \leq |x|+|y|$.

`ii)` $x+y \in \mathbb{B}$.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **325-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $|x+y| \le |x|+|y|$.

`1:` Aus `VS` gleich “$|x+y| \le |x|+|y|$”
folgt via **folk**: $|x+y| \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$|x+y| \in \mathbb{S}$”
folgt via **321-28**: $x+y \in \mathbb{B}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x+y \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x+y \in \mathbb{B}$”
folgt via **321-28**: $0 \le |x+y|$.

`2:` Aus `1`“$0 \le |x+y|$”
folgt via **107-17**: $(|x+y| \in \mathbb{R}) \vee (|x+y| = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $|x+y| \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1.Fall`“$|x+y| \in \mathbb{R}$”
folgt via **321-28**: $x+y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`“$x+y \in \mathbb{C}$”
folgt via **102-3**: $x, y \in \mathbb{C}$.

`5:` Aus `4`“$x, y \in \mathbb{C}$”
folgt via **325-13**: $|x+y| \le |x|+|y|$.

`2.2..Fall` $|x+y| = +\infty$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$|x+y| = +\infty$
folgt via **325-6**: $|x|+|y| = +\infty$.

`4:` Aus **107-6**“$+\infty \le +\infty$”,
aus `2.2.Fall` und
aus `3`
folgt: $|x+y| \le |x|+|y|$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $|x+y| \le |x|+|y|$.

□

325-15. Nun wird der SSatz Zahlen nachgereicht.

325-15(Satz) (**SSZ: SSatz Zahlen**)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{R}$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{T}$".

d) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{C}$".

e) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{B}$".

f) *Aus* "$x \in \mathbb{R}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x - y$ *Zahl*".

g) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{S}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{T}$".

h) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{T}$".

i) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{B}$".

j) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x - y$ *Zahl*".

k) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x - y$ *Zahl*".

l) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x - y \in \mathbb{T}$".

m) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$x - y$ *Zahl*".

n) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "$y \in \mathbb{B}$" *folgt* "$x - y$ *Zahl*".

o) *Aus* "$x \in \mathbb{T}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$x - y$ *Zahl*".

...

RECH-**Notation**.

<u>325-15(Satz)</u> **(SSZ: SSatz Zahlen)**

...

p) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "$y \in \mathbb{C}$" folgt "$x - y \in \mathbb{C}$".*

q) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$x - y \in \mathbb{B}$".*

r) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "y Zahl" folgt "$x - y$ Zahl".*

s) *Aus "$x \in \mathbb{B}$" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$x - y$ Zahl".*

t) *Aus "$x \in \mathbb{B}$" und "y Zahl" folgt "$x - y$ Zahl".*

u) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$x - y$ Zahl".*

<u>RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **325-15**</u> a) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{R}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus 1 "$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2
folgt: $x - y \in \mathbb{R}$.

b) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{S}$.

2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus 1 "$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2
folgt: $x - y \in \mathbb{S}$.

<u>Beweis **325-15**</u> `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{T}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{T}$.

`d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{C}$.

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{B}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{B}$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **folk**: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1` "$-y$ Zahl"
folgt via +**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

<u>Beweis **325-15**</u> `g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{T}$.

`h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{T}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{T}$.

`i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{B}$.

`j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{B}$"
folgt via +**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

<u>Beweis</u> **325-15** `k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **folk**: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `1` "$-y$ Zahl"
folgt via **+SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

`l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{T}$"
folgt via **+SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{T}$.

`m)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via **+SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

`n)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{B}$"
folgt via **+SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

<u>Beweis **325-15**</u> `o)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **folk**: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1`"$-y$ Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

`p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{C}$.

`q)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$-y \in \mathbb{B}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y \in \mathbb{B}$.

`r)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **folk**: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$" und
aus `1`"$-y$ Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

<u>Beweis **325-15**</u> `s)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$" und
aus `1` "$-y \in \mathbb{B}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

`t)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **folk**: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$" und
aus `1` "$-y$ Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

`u)` `VS` gleich $(x$ Zahl$) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **folk**: $-y$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$" und
aus `1` "$-y$ Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x - y$ Zahl.

$\square$

325-16. Nun wird der $-$ASatz Zahlen nachgereicht.

325-16(Satz) **($-$ASZ: $-$ASatz Zahlen)**

a) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *und* “$y \in \mathbb{R}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{R}$”.

b) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *und* “$y \in \mathbb{S}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{S}$”.

c) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *und* “$y \in \mathbb{T}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{T}$”.

d) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *und* “$y \in \mathbb{C}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{C}$”.

e) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *und* “$y \in \mathbb{B}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{B}$”.

f) *Aus* “$x \in \mathbb{R}$” *und* “y *Zahl*” *folgt* “$-x + y$ *Zahl*”.

g) *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$y \in \mathbb{S}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{T}$”.

h) *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$y \in \mathbb{T}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{T}$”.

i) *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$y \in \mathbb{C}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{B}$”.

j) *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$y \in \mathbb{B}$” *folgt* “$-x + y$ *Zahl*”.

k) *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “y *Zahl*” *folgt* “$-x + y$ *Zahl*”.

l) *Aus* “$x \in \mathbb{T}$” *und* “$y \in \mathbb{T}$” *folgt* “$-x + y \in \mathbb{T}$”.

m) *Aus* “$x \in \mathbb{T}$” *und* “$y \in \mathbb{C}$” *folgt* “$-x + y$ *Zahl*”.

n) *Aus* “$x \in \mathbb{T}$” *und* “$y \in \mathbb{B}$” *folgt* “$-x + y$ *Zahl*”.

o) *Aus* “$x \in \mathbb{T}$” *und* “y *Zahl*” *folgt* “$-x + y$ *Zahl*”.

...

RECH-**Notation**.

325-16(Satz) (−**ASZ: −ASatz Zahlen**)

...

p) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "$y \in \mathbb{C}$" folgt "$-x+y \in \mathbb{C}$".*

q) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$-x+y \in \mathbb{B}$".*

r) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "y Zahl" folgt "$-x+y$ Zahl".*

s) *Aus "$x \in \mathbb{B}$" und "$y \in \mathbb{B}$" folgt "$-x+y$ Zahl".*

t) *Aus "$x \in \mathbb{B}$" und "y Zahl" folgt "$-x+y$ Zahl".*

u) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$-x+y$ Zahl".*

RECH-**Notation**.

Beweis **325-16** a) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $-x+y \in \mathbb{R}$.

b) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via +**SZ**: $-x+y \in \mathbb{S}$.

c) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via +**SZ**: $-x+y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **325-16**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{C}$.

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{B}$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y$ Zahl.

`g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{T}$.

`h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **325-16**</u> `i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{B}$.

`j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y$ Zahl.

`k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y$ Zahl.

`l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{T}$.

`m)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $-x + y$ Zahl.

<u>Beweis **325-16**</u> `n)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **+SZ**: $-x + y$ Zahl.

`o)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **+SZ**: $-x + y$ Zahl.

`p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **+SZ**: $-x + y \in \mathbb{C}$.

`q)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **+SZ**: $-x + y \in \mathbb{B}$.

`r)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{C}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **+SZ**: $-x + y$ Zahl.

<u>Beweis</u> **<u>325-16</u>** `s)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{B}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **+SZ**: $-x + y$ Zahl.

`t)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{B}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **+SZ**: $-x + y$ Zahl.

`u)` `VS` gleich $(x$ Zahl$) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via **folk**: $-x$ Zahl.

`2:` Aus `1` "$-x$ Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **+SZ**: $-x + y$ Zahl.

$\square$

325-17. Nun wird der $-$SSatz Zahlen nachgereicht.

325-17(Satz) **($-$SSZ: $-$SSatz Zahlen)**

a) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{R}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{R}$".

b) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{S}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{S}$".

c) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{T}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{T}$".

d) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{C}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{C}$".

e) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "$y\in\mathbb{B}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{B}$".

f) *Aus* "$x\in\mathbb{R}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$-x-y$ *Zahl*".

g) *Aus* "$x\in\mathbb{S}$" *und* "$y\in\mathbb{S}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{T}$".

h) *Aus* "$x\in\mathbb{S}$" *und* "$y\in\mathbb{T}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{T}$".

i) *Aus* "$x\in\mathbb{S}$" *und* "$y\in\mathbb{C}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{B}$".

j) *Aus* "$x\in\mathbb{S}$" *und* "$y\in\mathbb{B}$" *folgt* "$-x-y$ *Zahl*".

k) *Aus* "$x\in\mathbb{S}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$-x-y$ *Zahl*".

l) *Aus* "$x\in\mathbb{T}$" *und* "$y\in\mathbb{T}$" *folgt* "$-x-y\in\mathbb{T}$".

m) *Aus* "$x\in\mathbb{T}$" *und* "$y\in\mathbb{C}$" *folgt* "$-x-y$ *Zahl*".

n) *Aus* "$x\in\mathbb{T}$" *und* "$y\in\mathbb{B}$" *folgt* "$-x-y$ *Zahl*".

o) *Aus* "$x\in\mathbb{T}$" *und* "y *Zahl*" *folgt* "$-x-y$ *Zahl*".

...

RECH-**Notation**.

325-17(Satz) **(−SSZ: −SSatz Zahlen)**

...

p) *Aus* “$x \in \mathbb{C}$” *und* “$y \in \mathbb{C}$” *folgt* “$-x-y \in \mathbb{C}$”.

q) *Aus* “$x \in \mathbb{C}$” *und* “$y \in \mathbb{B}$” *folgt* “$-x-y \in \mathbb{B}$”.

r) *Aus* “$x \in \mathbb{C}$” *und* “y *Zahl*” *folgt* “$-x-y$ *Zahl*”.

s) *Aus* “$x \in \mathbb{B}$” *und* “$y \in \mathbb{B}$” *folgt* “$-x-y$ *Zahl*”.

t) *Aus* “$x \in \mathbb{B}$” *und* “y *Zahl*” *folgt* “$-x-y$ *Zahl*”.

u) *Aus* “x *Zahl*” *und* “y *Zahl*” *folgt* “$-x-y$ *Zahl*”.

RECH-**Notation**.

Beweis **325-17** a) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1 “$-x \in \mathbb{R}$” und
aus VS gleich “$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via **SSZ**: $-x-y \in \mathbb{R}$.

b) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1 “$-x \in \mathbb{R}$” und
aus VS gleich “$\ldots y \in \mathbb{S}$”
folgt via **SSZ**: $-x-y \in \mathbb{S}$.

c) VS gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1 “$-x \in \mathbb{R}$” und
aus VS gleich “$\ldots y \in \mathbb{T}$”
folgt via **SSZ**: $-x-y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **325-17**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{C}$.

`e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{B}$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`g)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{T}$.

`h)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **325-17**</u> `i)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{B}$.

`j)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`k)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`l)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{T}$.

`m)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{C}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

<u>Beweis **325-17**</u> `n)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T}\ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`“$-x \in \mathbb{T}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{B}$”
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`o)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{T}\ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`“$-x \in \mathbb{T}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`p)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{C})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{C}\ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`“$-x \in \mathbb{C}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{C}$.

`q)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{C}\ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`“$-x \in \mathbb{C}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{B}$”
folgt via **SSZ**: $-x - y \in \mathbb{B}$.

`r)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y$ Zahl$)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{C}\ldots$”
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1`“$-x \in \mathbb{C}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y$ Zahl”
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

Beweis **325-17** `s)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{B}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{B}$"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`t)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B} \ldots$"
folgt via **folk**: $-x \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1` "$-x \in \mathbb{B}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

`u)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$"
folgt via **folk**: $-x$ Zahl.

`2:` Aus `1` "$-x$ Zahl" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **SSZ**: $-x - y$ Zahl.

$\square$

325-18. In besser zitierbarer Form wird **325-14** re-formuliert und als "Dreiecks-Ungleichung$|.|$" in die Essays aufgenommen.

325-18(Satz) (DU$|.|$: Dreiecks-Ungleichung$|.|$)

a) *Aus* "$(x, y \in \mathbb{R}) \vee (x, y \in \mathbb{C})$" *folgt* "$|x+y| \leq |x|+|y|$" *und* "$|x-y| \leq |x|+|y|$" *und* "$|-x+y| \leq |x|+|y|$" *und* "$|-x-y| \leq |x|+|y|$".

b) *Aus* "$(x+y \in \mathbb{R}) \vee (x+y \in \mathbb{S}) \vee (x+y \in \mathbb{C}) \vee (x+y \in \mathbb{B})$" *folgt* "$|x+y| \leq |x|+|y|$".

c) *Aus* "$(x-y \in \mathbb{R}) \vee (x-y \in \mathbb{S}) \vee (x-y \in \mathbb{C}) \vee (x-y \in \mathbb{B})$" *folgt* "$|x-y| \leq |x|+|y|$".

d) *Aus* "$(-x+y \in \mathbb{R}) \vee (-x+y \in \mathbb{S}) \vee (-x+y \in \mathbb{C}) \vee (-x+y \in \mathbb{B})$" *folgt* "$|-x+y| \leq |x|+|y|$".

e) *Aus* "$(-x-y \in \mathbb{R}) \vee (-x-y \in \mathbb{S}) \vee (-x-y \in \mathbb{C}) \vee (-x-y \in \mathbb{B})$" *folgt* "$|-x-y| \leq |x|+|y|$".

f) *Aus* "$|x+y| \leq |x|+|y|$" *folgt* "$x+y \in \mathbb{B}$".

g) *Aus* "$|x-y| \leq |x|+|y|$" *folgt* "$x-y \in \mathbb{B}$".

h) *Aus* "$|-x+y| \leq |x|+|y|$" *folgt* "$-x+y \in \mathbb{B}$".

i) *Aus* "$|-x-y| \leq |x|+|y|$" *folgt* "$-x-y \in \mathbb{B}$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **325-18** a) VS gleich $(x, y \in \mathbb{R}) \vee (x, y \in \mathbb{C})$.

1: Aus VS gleich "$(x, y \in \mathbb{R}) \vee (x, y \in \mathbb{C})$" folgt via $\vee$**SZ**: $x, y \in \mathbb{C}$.

2.1: Aus 1"$x, y \in \mathbb{C}$" folgt via $+$**SZ**: $x+y \in \mathbb{C}$.

2.2: Aus 1"$\ldots y \in \mathbb{C}$" folgt via **folk**: $-y \in \mathbb{C}$.

2.3: Aus 1"$x, y \in \mathbb{C}$" folgt via $-$**ASZ**: $-x+y \in \mathbb{C}$.

...

<u>Beweis **325-18**</u> `a)` `VS` gleich $(x, y \in \mathbb{R}) \vee (x, y \in \mathbb{C})$.

...

`3.1:` Aus `2.1`"$x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x + y \in \mathbb{B}$.

`3.2:` Aus Aus `1`"$x \ldots \in \mathbb{C}$" und
aus `2.2`"$\ldots - y \in \mathbb{C}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{C}$.

`3.3:` Aus `2.3`"$-x + y \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $-x + y \in \mathbb{B}$.

`3.4:` Aus `1`"$x \ldots \in \mathbb{C}$" und
aus `2.2`"$-y \in \mathbb{C}$"
folgt via $-$A**SZ**: $-x + (-y) \in \mathbb{C}$.

`4.1:` Aus `3.1`"$x + y \in \mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$

`4.2:` Aus `3.2`"$x + (-y) \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x + (-y) \in \mathbb{B}$.

`4.3:` Aus `3.3`"$-x + y \in \mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $|-x + y| \leq |-x| + |y|$.

`4.4:` Aus `3.4`"$-x + (-y) \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $-x + (-y) \in \mathbb{B}$.

`5.1:` Aus `4.2`"$x + (-y) \in \mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $|x + (-y)| \leq |x| + |-y|$.

`5.2:` Via **321-8** gilt: $|-x| = |x|$.

`5.3:` Aus `4.4`"$-x + (-y) \in \mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $|-x + (-y)| \leq |-x| + |-y|$.

...

<u>Beweis **325-18**</u> `a)` `VS` gleich $(x, y \in \mathbb{R}) \vee (x, y \in \mathbb{C})$.

...

`6.1:` Aus `5.1`
folgt: $|x - y| \le |x| + |-y|$.

`6.2:` Aus `4.3` und
aus `5.2`
folgt: $\boxed{|-x+y| \le |x| + |y|}$

`6.3:` Aus `5.3`
folgt: $|-x-y| \le |-x| + |-y|$.

`6.4:` Via **321-8** gilt: $|-y| = |y|$.

`7,1:` Aus `6.1` und
aus `6.4`
folgt: $\boxed{|x-y| \le |x| + |y|}$

`7.2:` Aus `6.3` und
aus `5.2`
folgt: $|-x-y| \le |x| + |-y|$.

`8:` Aus `7.2` und
aus `6.4`
folgt $\boxed{|-x-y| \le |x| + |y|}$

`b)` `VS` gleich $(x + y \in \mathbb{R}) \vee (x + y \in \mathbb{S}) \vee (x + y \in \mathbb{C}) \vee (x + y \in \mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x + y \in \mathbb{R}) \vee (x + y \in \mathbb{S}) \vee (x + y \in \mathbb{C}) \vee (x + y \in \mathbb{B})$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x + y \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1`"$x + y \in \mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $|x + y| \le |x| + |y|$.

<u>Beweis **325-18**</u> `c)` `VS` gleich $(x-y\in\mathbb{R})\vee(x-y\in\mathbb{S})\vee(x-y\in\mathbb{C})\vee(x-y\in\mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x-y\in\mathbb{R})\vee(x-y\in\mathbb{S})\vee(x-y\in\mathbb{C})\vee(x-y\in\mathbb{B})$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x-y\in\mathbb{B}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x+(-y)\in\mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`"$x+(-y)\in\mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $|x+(-y)|\leq|x|+|-y|$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $|x-y|\leq|x|+|-y|$.

`4.2:` Via **321-8** gilt: $|-y|=|y|$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $|x-y|\leq|x|+|y|$.

`d)` `VS` gleich $(-x+y\in\mathbb{R})\vee(-x+y\in\mathbb{S})\vee(-x+y\in\mathbb{C})\vee(-x+y\in\mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(-x+y\in\mathbb{R})\vee(-x+y\in\mathbb{S})\vee(-x+y\in\mathbb{C})\vee(-x+y\in\mathbb{B})$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $-x+y\in\mathbb{B}$.

`2:` Aus `1`"$-x+y\in\mathbb{B}$"
folgt via **325-14**: $|-x+y|\leq|-x|+|y|$.

`3:` Via **321-8** gilt: $|-x|=|x|$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $|-x+y|\leq|x|+|y|$.

Beweis **325-18** `e)`

`VS` gleich $(-x-y\in\mathbb{R})\vee(-x-y\in\mathbb{S})\vee(-x-y\in\mathbb{C})\vee(-x-y\in\mathbb{B})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$(-x-y\in\mathbb{R})\vee(-x-y\in\mathbb{S})\vee(-x-y\in\mathbb{C})\vee(-x-y\in\mathbb{B})$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $-x-y\in\mathbb{B}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $-x+(-y)\in\mathbb{B}$.

`3:` Aus `2`“$-x+(-y)\in\mathbb{B}$”
folgt via **325-14**: $|-x+(-y)|\le|-x|+|-y|$.

`4.1:` Aus `3`
folgt: $|-x-y|\le|x|+|-y|$.

`4.2:` Via **321-8** gilt: $|-x|=|x|$.

`4.3:` Via **321-8** gilt: $|-y|=|y|$.

`5:` Aus `4.1`,
aus `4.2` und
aus `4.3`
folgt: $|-x-y|\le|x|+|y|$.

□

- **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, De-Gruyter, 1978(3).
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer, 1996.
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.